Relatividad para estudiantes de física

Shahen Hacyan

EDICIONES
CIENTÍFICAS
UNIVERSITARIAS

TEXTO CIENTÍFICO
UNIVERSITARIO

La teoría de la relatividad es uno de los pilares de la física moderna. No es exagerado afirmar que sin ella es imposible entender a fondo los fenómenos electromagnéticos. Es, además, la base de la cosmología y su unión con la mecánica cuántica ha permitido comprender el mundo de las partículas más elementales de la materia. Tiene asimismo importantes aplicaciones en la tecnología moderna, donde se requieren mediciones de distancias y tiempos tan precisas que los efectos relativistas se vuelven imprescindibles.

La presente edición aborda el estudio de la teoría de la relatividad especial o restringida, propuesta por Einstein en 1905, y presenta una introducción a los principios fundamentales de la relatividad general y la cosmología moderna. Está dirigida a estudiantes con conocimientos básicos en mecánica clásica y electrodinámica, y pretende explicar de forma clara y explícita los fundamentos de la teoría, como la covariancia de las leyes de la física y, en particular, del electromagnetismo. Con ello, el autor logra ofrecer una sólida herramienta matemática cuyas aplicaciones se ilustran con diversos ejemplos a lo largo del texto.

www.fondodeculturaeconomica.com

ISBN 978-607-16-1523-7

FONDO DE CULTURA ECONÓMICA

EDICIONES CIENTÍFICAS UNIVERSITARIAS

SERIE TEXTO CIENTÍFICO UNIVERSITARIO

RELATIVIDAD PARA ESTUDIANTES DE FÍSICA

SHAHEN HACYAN

Relatividad para estudiantes de física

FONDO DE CULTURA ECONÓMICA

Primera edición, 1995
Segunda edición, 2013
Primera reimpresión, 2017

Hacyan, Shahen
Relatividad para estudiantes de física / Shahen Hacyan. — 2ª ed. — México : FCE, 2013
188 p. ; ilus. ; 23 × 17 cm — (Colec. Ediciones Científicas Universitarias)
ISBN 978-607-16-1523-7

1. Relatividad, Teoría de la I. Ser. II. t.

LC QCH32 Dewey 530.11 H713r

Distribución mundial

D. R. © 1995, Fondo de Cultura Económica
Carretera Picacho-Ajusco, 227; 14738 Ciudad de México
www.fondodeculturaeconomica.com
Comentarios: editorial@fondodeculturaeconomica.com
Tel.: (55)5227-4672

Diseño de portada: Laura Esponda Aguilar

Se prohíbe la reproducción total o parcial de esta obra, sea cual fuere el medio, sin la anuencia por escrito del titular de los derechos.

ISBN 978-607-16-1523-7

Impreso en México • Printed in Mexico

ÍNDICE GENERAL

Prefacio a la segunda edición 11

Prefacio a la primera edición 13

I. *Principios fundamentales* 15
I.1 El principio de relatividad de Galileo 15
I.2 Incompatibilidad entre electromagnetismo y relatividad galileana. El éter 17
I.3 La teoría de la relatividad de Einstein 22
I.4 El espacio-tiempo 23
I.5 La transformación de Lorentz 25
I.6 El espacio de Minkowski 27

II. *Cinemática y óptica relativistas* 31
II.1 Contracción del tiempo y del espacio 31
II.1.1 Contracción del tiempo 31
II.1.2 Contracción de Lorentz 36
II.2 Transformación de velocidades 38
II.3 Aberración óptica 40
II.4 Efecto Doppler 41
II.5 Taquiones y máquinas del tiempo 44
II.6 Aceleración uniforme 46

III. *Vectores y tensores* 49
III.1 Rotaciones en tres dimensiones 49
III.2 Transformaciones generales de Lorentz 50
III.3 El grupo de Lorentz 52
III.4 Tensores 55
III.5 Convención de Einstein 59
III.6 Algunas definiciones útiles 60
III.7 Cuadrivector unitario de velocidad 61

IV. *Dinámica relativista* 65
IV.1 Repaso de mecánica clásica 65
IV.2 Masa, energía y momento en mecánica relativista 68

IV.3 Aplicaciones de las leyes de la conservación: Choques de partículas 72
IV.3.1 Efecto Compton 73
IV.3.2 Desintegración de partículas 74
IV.3.3 La reacción $e^+ e^- \to \gamma\gamma$ 76
IV.3.4 Choques inelásticos 77
IV.4 Momento angular relativista 78
IV.5 Variables de Mandelstam 81
IV.6 El cohete relativista 83

V. *Electrodinámica y relatividad* 87
V.1 Ecuaciones de Maxwell (repaso) 87
V.1.1 Potenciales electromagnéticos 88
V.2 El tensor electromagnético 90
V.2.1 Invariantes del campo 94
V.2.2 Fuerza de Lorentz 96
V.3 Movimiento de partículas cargadas en campos eléctricos o magnéticos constantes 97
V.3.1 Campo magnético constante 97
V.3.2 Campo eléctrico constante 99
V.3.3 Campo electromagnético constante 101
V.3.4 Campo magnético no uniforme 103
V.3.5 Movimiento en un campo coulombiano 105
V.3.6 Partícula en el campo de una onda plana 109
V.4 Campo electromagnético de cargas en movimiento . . . 111
V.4.1 Carga en movimiento uniforme 111
V.4.2 El campo de una corriente eléctrica 112

VI. *Tensores de energía-momento* 116
VI.1 Hidrodinámica 117
VI.2 Tensor hidrodinámico relativista 120
VI.3 Termodinámica e Hidrodinámica relativista 123
VI.4 El tensor de energía-momento electromagnético 126
VI.5 Tensor de energía-momento electromagnético con materia 129

VII. *Cálculo tensorial* 131
VII.1 Coordenadas generalizadas 131
VII.1.1 Derivada covariante 134
VII.2 Vectores base 139
VII.3 Espacios curvos 140

VII.4 Geometría riemanniana 143
VII.4.1 Algunas propiedades del tensor de Riemann . . 145

VIII. *La teoría de la gravitación de Einstein* 147
VIII.1 El principio de equivalencia 147
VIII.2 Gravedad y curvatura 148
VIII.3 Las ecuaciones de Einstein 153

IX. *Campo gravitacional con simetría esférica* 157
IX.1 Movimiento de partículas en el espacio-tiempo de Schwarzschild 158
IX.2 Movimiento de fotones 161
IX.3 Análisis de la métrica de Schwarzschild 163
IX.4 Colapso gravitacional 166

X. *Cosmología* 170
X.1 Ecuaciones fundamentales 171
X.2 Dinámica cósmica 175
X.2.1 La teoría de la Gran Explosión 179

Bibliografía 183

Índice analítico 185

PREFACIO A LA SEGUNDA EDICIÓN

El presente libro de texto es una nueva edición del anterior *Relatividad especial para estudiantes de física*, en la que he agregado una segunda parte que cubre también la teoría de la relatividad general. Por ello, la palabra "especial" fue eliminada del título, pues el nuevo texto abarca tanto la teoría especial como la general. Asimismo, he aprovechado la ocasión para incluir algunos ejemplos y ejercicios adicionales en la parte original y, además, corregir unas cuantas erratas de la primera edición.

En la edición de 1992 mencionaba que la relatividad general estaba desempeñando un papel cada vez más importante en la física moderna. Actualmente, esta afirmación se sigue sosteniendo con más fundamento. En las últimas décadas se han dado muchos avances notables en el campo de la cosmología, una ciencia que ya se ha vuelto exacta y cuya base teórica es la relatividad general. Es conveniente, pues, que los estudiantes de física estén familiarizados con esta teoría. Pero incluso si no tienen un interés especial en la relatividad general, su formalismo matemático, el cálculo tensorial, tiene importantes aplicaciones en diversos campos de la física. Por ello, el capítulo VII de este texto resultará de utilidad como una introducción a esta herramienta matemática.

La segunda parte de este libro no pretende ser un texto completo de relatividad general, sino sólo una presentación de sus conceptos básicos y resultados más importantes. He tratado de reducir al mínimo los cálculos, sin por ello abandonar el rigor que requiere una teoría tan fuertemente enraizada en un formalismo matemático. Para aquellos que quieran profundizar más en el tema, he incluido una breve bibliografía con algunos de los libros de texto más conocidos de relatividad y cosmología.

SHAHEN HACYAN
Ciudad Universitaria, mayo de 2013

PREFACIO A LA PRIMERA EDICIÓN

La presente monografía tiene sus orígenes en las notas de clase que preparé para impartir varios cursos de relatividad en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Estos cursos estaban destinados principalmente a estudiantes de los semestres quinto y sexto de la carrera de física, es decir, estudiantes familiarizados ya con los fundamentos de la mecánica clásica y la electrodinámica. Este es el nivel aconsejable para leer esta monografía.

Hace mucho que la teoría de la relatividad de Albert Einstein dejó de ser una curiosidad para transformarse, junto con la mecánica cuántica, en uno de los pilares de la física moderna. No es exagerado afirmar que, hoy en día, muchos campos de la física no pueden prescindir de la relatividad especial. En cuanto a la relatividad general, a pesar de tener menos aplicaciones —y que no consideraremos en esta monografía—,[1] desempeña un papel cada vez más importante en astrofísica.

Se han publicado en los últimos años muchos libros de relatividad, a muy diversos niveles y con distintos enfoques. Sin embargo, no siempre se presenta de una manera clara y explícita uno de los conceptos básicos de la relatividad especial: la covariancia de las leyes de la física frente a transformaciones de Lorentz. Por ejemplo, el hecho de que las ecuaciones de Maxwell sean covariantes frente a dichas transformaciones no suele demostrarse detalladamente, y apenas si se menciona como dato histórico, cuando en realidad fue ese hecho —y no únicamente el experimento de Michelson-Morley— el que dio la clave a Einstein para formular su teoría: por algo el famoso artículo de Einstein de 1905 se titulaba "Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento".

En los primeros capítulos que siguen se presentan la cinemática y la dinámica relativista, y se analizan los resultados más importantes, para llegar, de una manera que me parece natural, a la demostración de que la electrodinámica de Maxwell es, efectivamente, covariante.

Con base en mi experiencia, considero que el material de los presentes seis capítulos[2] puede ser cubierto en un curso de un semestre de la carrera de física. He dejado de lado, deliberadamente, la relatividad general, pues su inclusión

[1] Sí se considera en esta segunda edición. Véase el prefacio correspondiente.

[2] Diez ya en esta segunda edición.

haría demasiado pesado este curso. Sin embargo, creo que esta monografía puede servir de introducción a la teoría general.

Agradezco al Conacyt el apoyo que me brindó por medio de una Cátedra Patrimonial para la elaboración del presente texto. También quiero agradecer a Marcela Hernández la transcripción en LaTeX de esta monografía, y su valiosa colaboración en el proceso de edición.

Shahen Hacyan
Ciudad Universitaria, octubre de 1992

I. PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

I.1 El principio de relatividad de Galileo

Cuando dejamos caer una piedra en un vehículo en movimiento ¿cae verticalmente con respecto al vehículo o con respecto al exterior? La experiencia nos enseña que si el vehículo se mueve en línea recta y sin variar su velocidad, todo sucede dentro de él como si no se estuviera moviendo. En un autobús que corre a 100 km/h, un objeto que cae de manos de un pasajero no se dispara a 100 km/h hacia la parte trasera del vehículo, sino que cae verticalmente con respecto al piso del autobús.

La misma experiencia diaria nos indica que podemos sentir el movimiento dentro de un vehículo si éste acelera, frena, o toma una curva, es decir, en general, cuando se aparta de un movimiento rectilíneo con velocidad constante. Por ejemplo, en un vehículo que frena bruscamente sentimos una fuerza que nos arroja hacia adelante; fuerzas de este tipo se llaman *inerciales* y se deben a la tendencia de todo cuerpo a mantener su movimiento uniforme rectilíneo; en este sentido son fuerzas ficticias, pues no resultan de la interacción con otros cuerpos.

Todo movimiento debe referirse a algún *sistema de referencia*, que se escoge de forma tal que sea el más apropiado para describir los fenómenos que en él ocurren. Entre todos los posibles sistemas en movimiento, ocupan un lugar muy especial aquellos que poseen una velocidad uniforme y rectilínea, o, más precisamente, aquellos en los cuales no hay fuerzas inerciales. Dichos sistemas se llaman *sistemas inerciales*.

En nuestra experiencia diaria, el sistema de referencia más utilizado es la Tierra misma. Es un sistema de referencia inercial, excepto por una ligerísima fuerza no inercial producida por su rotación, pero que es prácticamente despreciable para casi todos los fines prácticos. Sin embargo, la Tierra gira alrededor del Sol a 30 km/s y el Sol se mueve a 220 km/s alrededor del centro de nuestra galaxia, la Vía Láctea, a pesar de lo cual la Tierra nos parece perfectamente inmóvil.

El hecho de que el movimiento de la Tierra sea prácticamente imperceptible se debe a un principio fundamental que Galileo Galilei enunció claramente en el siglo XVII: las leyes de la física son independientes de cualquier sistema de referencia, por lo que es imposible determinar por medio de experimentos

mecánicos si un sistema inercial se mueve o no. Éste es el *principio de relatividad de Galileo.*

Si tenemos dos sistemas inerciales que se mueven uno con respecto al otro con cierta velocidad (constante, obviamente), para todo fin práctico el primer sistema puede considerarse en reposo y el segundo en movimiento. Cualquiera de los dos casos son equivalentes en el sentido de que las leyes físicas son las mismas en los dos sistemas. Vemos así que el movimiento es un concepto relativo al sistema desde el cual se mide.

Formulemos ahora el principio de Galileo en forma matemática. Consideremos dos sistemas inerciales S y S' que se mueven uno con respecto al otro con velocidad (constante) V (figura I.1).

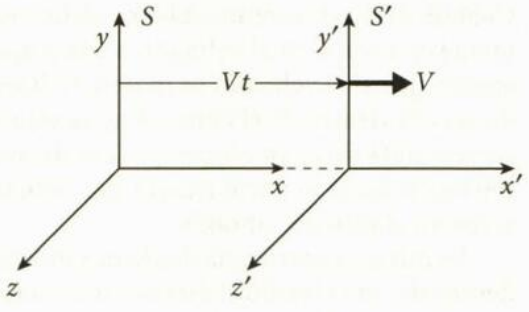


FIGURA I.1

Construyamos dos sistemas de coordenadas: (x, y, z) en el sistema S y (x', y', z') en el sistema S'. Sin perder generalidad escojamos los ejes x y x' a lo largo de la dirección de la velocidad del sistema S' (figura I.1). Supongamos que, al tiempo $t = 0$, los dos sistemas de coordenadas coinciden. ¿Cómo se relacionarán entre sí después de un tiempo arbitrario t? Un simple vistazo a la figura I.1 revela que

$$\begin{aligned} x' &= x - Vt \\ y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{I.1}$$

Sólo nos falta determinar cómo relacionar los tiempos t y t', medidos en los dos sistemas. Si un reloj en S y otro en S' se sincronizan poniendo $t = t' = 0$ en el momento en que los dos sistemas de coordenadas coinciden, nuestro "sentido común" nos indica que los dos relojes marcarán siempre el mismo tiempo, es decir, el tiempo transcurrirá en la misma forma en cada uno de los sistemas. Dicho de otro modo, debe existir un *tiempo absoluto* medido de la misma manera por cualquier sistema en movimiento. Esto nos conduce a complementar las transformaciones (I.1) con la condición adicional

$$t' = t. \tag{I.2}$$

Las fórmulas (I.1) y (I.2) definen un cambio de coordenadas llamado *transformación de Galileo.* El principio de la relatividad de Galileo implica que las leyes de la física no cambian su forma ante estas transformaciones.

Nótese que la condición (I.2) es, en realidad, un postulado, aunque parece bien fundamentado en nuestra experiencia diaria. En efecto, los relojes no parecen funcionar ni más ni menos rápidamente en un sistema de referencia en movimiento. Si así fuera, no habría un tiempo absoluto y tendríamos que sincronizar constantemente nuestros relojes...

La primera ley de Newton, que afirma que todos los cuerpos se mueven en línea recta y con velocidad constante si no actúan fuerzas externas sobre ellos, es otra faceta del principio de relatividad de Galileo. Si bien Newton nunca rechazó este principio, postuló la existencia de un *espacio absoluto,* que equivaldría a un sistema de referencia único y particular, con respecto al cual, en promedio, toda la materia en el Universo estaría en reposo. Hay que insistir en que la existencia de un sistema de referencia absoluto no contradice necesariamente el principio de Galileo, que únicamente postula el hecho de que las leyes de la física son las mismas en cualquier sistema de referencia inercial, sea éste un sistema universal y absoluto, o cualquier otro. No se puede determinar por medio de experimentos físicos si uno se encuentra en movimiento con respecto al hipotético espacio absoluto.

El concepto de espacio absoluto permaneció en la física más de dos siglos después de Newton, a pesar de no ser esencial en la mecánica clásica. Además, Newton introdujo el concepto de *tiempo absoluto,* cuya existencia implica que hay una manera única de medir el tiempo, como si hubiera un solo reloj cósmico.

Un tiempo absoluto, independiente de quién lo mide, es parte de nuestra experiencia, o por lo menos eso parecía hasta que llegó Einstein.

I.2 Incompatibilidad entre electromagnetismo y relatividad galileana. El éter

Si bien el principio de la relatividad galileana parece perfectamente sólido, las primeras dificultades con él empezaron cuando James Clerk Maxwell[1] elaboró, alrededor de 1860, su famosa teoría electromagnética.

En el siglo XVIII, Charles-Augustin de Coulomb[2] había demostrado que dos cuerpos eléctricamente cargados ejercen una fuerza de atracción o repulsión entre sí similar a la fuerza gravitacional: proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.

[1]James Clerk Maxwell (1831-1879), físico escocés a quien se debe, entre otras importantes contribuciones, la formulación matemática de las leyes de la electricidad y el magnetismo. Se le considera como el puente entre la física clásica y la física moderna.

[2]Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806), físico francés.

Aproximadamente por la misma época, Benjamin Franklin, en Estados Unidos, demostró que los rayos que se producen durante las tormentas son gigantescas chispas eléctricas que saltan entre las nubes y el suelo.

El estudio de la electricidad cobró un auge muy especial cuando se inventaron las pilas, que en un principio se consideraban botellas que contenían un misterioso "fluido eléctrico". Las pilas producen una corriente eléctrica en un cable de metal; hoy en día sabemos que la corriente eléctrica es efectivamente un flujo de partículas: los electrones.

El hecho de que el magnetismo está relacionado con la electricidad se hizo evidente cuando Hans Christian Oersted[3] descubrió, a principios del siglo XIX, que las corrientes eléctricas producen fuerzas magnéticas que influyen sobre los imanes: una brújula tiende a orientarse perpendicularmente a un cable por donde pasa una corriente eléctrica suficientemente fuerte. Posteriormente, André-Marie Ampère[4] encontró una ley que relaciona la corriente eléctrica con la fuerza magnética que genera.

Pero el fenómeno más importante que pone de manifiesto la relación entre la electricidad y el magnetismo fue descubierto por Michael Faraday[5] en 1831. Faraday notó que el movimiento de un imán puede inducir una corriente eléctrica en un cable, sin necesidad de pilas. En su época, este fenómeno parecía tener poca importancia, pero un siglo después el efecto Faraday sirvió para generar y utilizar la energía eléctrica.

Tal era la situación de la electricidad y el magnetismo hasta mediados del siglo XIX: una serie de fenómenos y leyes aislados que relacionaban entre sí la electricidad y el magnetismo. Hacía falta una formulación unificada de estas leyes que permitiera una comprensión más profunda de la naturaleza de estas fuerzas. Tal obra fue realizada por Maxwell.

Maxwell logró expresar las leyes descubiertas por Coulomb, Faraday y Ampère en un conjunto de ecuaciones diferenciales que relacionan matemáticamente las distribuciones de cargas y corrientes con las fuerzas eléctricas y magnéticas que generan en cada punto del espacio.

Las ecuaciones de Maxwell permitieron ver en forma clara que la electricidad y el magnetismo son dos manifestaciones de un mismo fenómeno físico: el electromagnetismo. El fenómeno era similar a la gravitación, cuyas leyes fueron descubiertas por Newton; así como un cuerpo masivo produce una fuerza

[3] Hans Christian Oersted (originalmente Ørsted) (1777-1851), físico y químico danés.

[4] André-Marie Ampère (1775-1836), físico y matemático francés.

[5] Michael Faraday (1791-1867), científico inglés cuyos experimentos fueron cruciales para entender los fenómenos electromagnéticos. Se le deben importantes descubrimientos, como la electrolisis y el diamagnetismo, así como el efecto de inducción electromagnética que permite generar corriente eléctrica.

gravitacional sobre otro, un cuerpo eléctricamente cargado y en movimiento produce una fuerza electromagnética sobre otro cuerpo cargado. La diferencia más importante es que la magnitud y la dirección de la fuerza electromagnética dependen de la carga del cuerpo que lo produce y también de su velocidad; por esta razón, la teoría del electromagnetismo es más complicada que la teoría newtoniana de la gravitación, y las ecuaciones de Maxwell son más complejas que la fórmula de Newton para la fuerza gravitacional.

Un aspecto común entre la gravitación y el electromagnetismo es la existencia de una aparente acción a distancia entre los cuerpos, lo cual Newton consideraba el punto débil de su teoría. Maxwell no resolvió el problema, pero inventó un concepto que desde entonces se ha utilizado constantemente en la física: el *campo electromagnético*, que a su vez está inspirado en el concepto de *línea de fuerza* inventado por Faraday. Según esta interpretación, en todo punto del espacio alrededor de una carga existe una fuerza electromagnética, cuya intensidad y dirección están definidas por medio de unos vectores. En realidad, más que un concepto, el campo es una definición que da cierta consistencia a la idea de que una carga eléctrica actúa sobre otra lejana, sin tener que recurrir a una acción a distancia. Sólo en el siglo XX se pudo encontrar cierta base física para este concepto; aun así, en tiempos de Maxwell el campo electromagnético era una noción matemática sumamente útil descrita por ecuaciones, pero cuya realidad física trascendía toda interpretación.

El primer éxito, y el más notable, de la teoría de Maxwell fue la elucidación de la naturaleza de la luz. Maxwell demostró a partir de sus ecuaciones matemáticas que existen ondas electromagnéticas que consisten en oscilaciones del campo electromagnético. Estas ondas fueron identificadas con la luz misma, con lo cual quedó establecida, más allá de cualquier duda, la naturaleza ondulatoria de la luz, tal como lo pensaba Huygens y en contra de la opinión de Newton.

Pero ¿qué sustenta a una onda en el espacio? No quedó más recurso a Maxwell que recurrir a la existencia de un *éter*, una misteriosa sustancia intangible, que permea todos los cuerpos en el Universo y que sirve como medio físico para transportar las ondas electromagnéticas. Pero el problema del éter estaba relacionado con otro aspecto, enigmático, de la teoría de Maxwell: la aparente necesidad de un espacio absoluto.

Como mencionamos anteriormente, las leyes de la física deben ser independientes de todo sistema de referencia, de acuerdo con el principio de relatividad de Galileo. Sin embargo, las leyes del electromagnetismo, tal como las planteaba Maxwell, no cumplen este principio: al pasar de un sistema de referencia a otro, las ecuaciones de Maxwell toman una forma distinta, lo que parece implicar leyes de la física diferentes. De hecho, las ecuaciones del

electromagnetismo en la forma deducida por Maxwell sólo podían ser válidas en un sistema de referencia muy especial, y los físicos especularon que ése no podía ser otro que el espacio absoluto.

Ilustremos lo anterior con un ejemplo simple. Sabemos que el campo magnético actúa sobre una partícula cargada si ésta se encuentra en movimiento: la fuerza ejercida es directamente proporcional a la velocidad (y perpendicular a la dirección del movimiento). Consideremos un sistema inercial S en el que un alambre conductor, por el cual fluye una corriente, se encuentra en reposo: los iones positivos del alambre están fijos y los electrones se mueven con velocidad V. Consideremos, además, una partícula con carga q que se mueve con la misma velocidad V paralelamente al alambre. Ahora bien, en el alambre fluye una corriente eléctrica que, según la ley de Ampère (contenida en las ecuaciones de Maxwell), genera un campo magnético **B**, tal como lo señala la figura I.2. Este campo magnético produce, a su vez, una fuerza $\mathbf{F} = q\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ sobre la partícula cargada. Esta fuerza es perpendicular al alambre y aparta a la partícula de su trayectoria rectilínea.

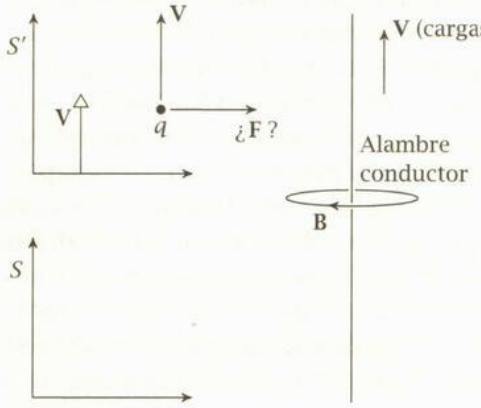


FIGURA I.2

Veamos ahora el mismo experimento desde un sistema inercial S', en el que la partícula cargada está en reposo. En ese sistema, se verá a los electrones del alambre en reposo y a los iones en movimiento, por lo que también habrá una corriente eléctrica que genera un campo magnético. Pero ahora la partícula cargada tiene velocidad $V = 0$, así que el campo magnético *no* produce ninguna fuerza sobre ella.

Llegamos así al resultado paradójico de que la partícula cargada, en el sistema S, es desviada de su trayectoria rectilínea, pero no lo es en el sistema S'.

Este tipo de contradicciones condujo a los físicos del siglo XIX a postular que las ecuaciones de Maxwell son válidas sólo en un sistema particular y no en cualquiera, en contra del principio de Galileo. Así, sería posible determinar por medio de experimentos eléctricos y magnéticos si un sistema inercial está en movimiento o no. Más aún, la velocidad de la luz debe ser constante con respecto al éter en reposo, así que uno puede determinar la velocidad de un sistema inercial midiendo en ella la velocidad de la luz en varias direcciones.

En efecto, si la luz tiene una velocidad bien definida con respecto al éter, entonces esta velocidad debe variar según el movimiento de quien la mida. Como la Tierra gira alrededor del Sol con una velocidad aproximada de 30 kilómetros por segundo, un rayo de luz emitido en el sentido del movimiento de la Tierra debe moverse, con respecto a la Tierra misma, con una velocidad menor que un rayo emitido en la dirección contraria, siendo la diferencia de velocidades entre los dos rayos luminosos de 60 kilómetros por segundo. Si se pudiera medir esta variación de la velocidad se confirmaría indirectamente la existencia del éter, o al menos la de un sistema de referencia absoluto.

La velocidad de la luz es de aproximadamente 300 000 kilómetros por segundo;[6] resulta, pues, evidente que la medición de la velocidad luminosa debe ser extremadamente precisa para poder detectar una variación de sólo 60 kilómetros por segundo. Tal era el reto para los físicos experimentales del siglo XIX.

El primer experimento confiable para medir la velocidad de la Tierra con respecto al éter fue realizado en 1887 por los norteamericanos Albert Abraham Michelson y Edward W. Morley. El aparato que utilizaron fue un interferómetro, que permite medir distancias y velocidades con enorme precisión utilizando haces de luz en interacción. El experimento consistía en dividir, por medio de un espejo semitransparente, un haz luminoso en dos haces perpendiculares, que se reflejan en sendos espejos para volver a unirse y producir un "patrón de interferencia". Luego se giraba todo el aparato: cualquier cambio en la velocidad de la luz debería producir una interferencia distinta entre los dos haces luminosos, la cual podía detectarse directamente.

El experimento se llevó a cabo con todo el cuidado necesario, pero, sorprendentemente, Michelson y Morley no detectaron ningún cambio en la velocidad de la luz. A pesar del movimiento de la Tierra, la luz se movía con la misma velocidad en todas direcciones.

¿Cómo explicar el resultado negativo del experimento? Tanto Michelson y Morley como otros físicos propusieron varias hipótesis: quizás la Tierra arrastra consigo al éter en su movimiento; quizás los cuerpos se contraen en la dirección de su movimiento, lo cual cancela el efecto debido a la diferencia de velocidades de los dos haces luminosos del experimento; quizás la velocidad de la luz es constante con respecto a la fuente que la emite, etc. Durante algunas décadas, el resultado negativo del experimento de Michelson-Morley fue uno de esos detalles molestos que no encajan en ninguna teoría bien establecida, y que no cobran verdadera importancia hasta que se produce una revolución científica. En este caso, la revolución científica fue la teoría de la relatividad.

[6] La velocidad de la luz es, por definición, exactamente 299 792 458 metros por segundo. Para la mayoría de fines prácticos, se redondea este valor a 300 000 kilómetros por segundo.

I.3 La teoría de la relatividad de Einstein

En 1905 apareció la *Teoría de la relatividad especial* de Albert Einstein, la cual solucionaba el problema de la invariancia de la velocidad lumínica en forma drástica. Sin embargo, pasaron varios años hasta que el trabajo de Einstein fuese aceptado por la comunidad científica. Hoy en día, la teoría de la relatividad es, junto con la mecánica cuántica, uno de los pilares de la física moderna.

Einstein postuló, en primer lugar, que las ecuaciones de Maxwell son rigurosamente válidas en cualquier sistema inercial de referencia. Para ello, Einstein declaró que el éter simplemente no existe; por lo tanto, no existe ningún sistema de referencia privilegiado. Pero, al no haber éter, ¿con respecto a qué debe medirse la velocidad de la luz? La respuesta de Einstein fue drástica: *la velocidad de la luz es la misma en cualquier sistema de referencia;* después de todo, eso es lo que indica el experimento de Michelson y Morley.

Este concepto de que la velocidad de la luz es invariante choca con nuestro "sentido común". Siendo que la velocidad de la luz es de 300 000 km/s, parecería lógico que al correr detrás de una señal luminosa la viésemos con una velocidad menor. Sin embargo, según Einstein, no importa cómo se mueva un sistema de referencia, la velocidad de la luz medida en él será siempre igual a $c = 300\,000$ km/s.

La teoría de la relatividad implica, asimismo, que las transformaciones de Galileo (ecuaciones I.1 y I.2, p. 16) no son válidas por ser incompatibles con las ecuaciones de Maxwell. Pero, entonces, ¿existe una transformación de coordenadas, parecida a la de Galileo, que mantenga invariante la forma de las ecuaciones de Maxwell? La respuesta es afirmativa; a fines del siglo XIX, Lorentz[7] la había descubierto:

La transformación de Lorentz

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{I.3}$$

[7] Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928), importante físico neerlandés, quien desarrolló la electrodinámica de Maxwell; en particular elaboró una teoría del electrón precursora de la relatividad de Einstein.

Para Lorentz, su descubrimiento era sólo una curiosidad matemática. Le tocaría a Einstein encontrar el profundo significado físico de esta transformación.

EJERCICIO I.1. Demuestre que la transformación (I.3) se reduce a la de Galileo si la velocidad V es despreciable con respecto a la velocidad de la luz.

I.4 El espacio-tiempo

Un concepto extremadamente útil en la teoría de la relatividad es el del espacio-tiempo. La idea es muy simple: si queremos describir un suceso que ocurre en cierto lugar y en cierto momento, debemos especificar no sólo las tres coordenadas espaciales sino también una cuarta "coordenada", el tiempo en que ocurre el suceso.

Al conjunto de todos los sucesos podemos entenderlo como un espacio de cuatro dimensiones: tres espaciales y una temporal. Cada punto en este espacio es un suceso. Si un suceso ocurre en un punto con coordenadas (x, y, z) en el tiempo t, tendrá coordenadas (x, y, z, ct) en el espacio-tiempo. Nótese que hemos usado como cuarta coordenada el tiempo multiplicado por c, con el fin de que la coordenada temporal también tenga unidades de distancia (en estas unidades cada segundo equivale a una distancia de 300 000 km).

Ahora bien, en el espacio común y corriente de tres dimensiones es posible definir la distancia entre dos puntos. En coordenadas cartesianas, por ejemplo, la distancia entre los puntos P_1 y P_2 con coordenadas (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) es, según el teorema de Pitágoras,

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Una propiedad básica de esta distancia es ser invariante, en el sentido de que una transformación de coordenadas no debe afectar el valor de la distancia entre dos puntos dados.

Si consideramos ahora a la unión del espacio tridimensional y del tiempo como un espacio de cuatro dimensiones, cabe la pregunta de si se puede definir una "distancia" entre dos sucesos (x_1, y_1, z_1, ct_1) y (x_2, y_2, z_2, ct_2). Se estaría tentado de definirla como

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (ct_2 - ct_1)^2},$$

siguiendo la analogía con el teorema de Pitágoras. Pero ¿es la "distancia", así definida, "invariante"? y ¿en qué sentido?

La clave es el postulado de Einstein de que la velocidad de la luz es constante en cualquier sistema de coordenadas.

Consideremos un sistema inercial S en el cual sucede lo siguiente: del punto (x_1, y_1, z_1) se emite, en el tiempo t_1, una señal luminosa que llega al punto (x_2, y_2, z_2) en el tiempo t_2. La velocidad de la señal luminosa es

$$c = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}{t_2 - t_1},$$

de donde

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0.$$

Consideremos ahora el mismo suceso visto desde otro sistema inercial S': la señal luminosa es emitida del punto (x_1', y_1', z_1') en el tiempo t_1' y recibida en el punto (x_2', y_2', z_2') en el tiempo t_2'. Debido a la invariancia de la velocidad de la luz, se tiene

$$c = \frac{\sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2}}{t_2' - t_1'},$$

de donde

$$(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 - c^2(t_2' - t_1')^2 = 0$$

Si definimos ahora la seudodistancia (al cuadrado) entre dos sucesos (x_1, y_1, z_1, ct_1) y (x_2, y_2, z_2, ct_2) como

$$s_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2, \qquad \text{(I.4)}$$

vemos que si $s_{12}^2 = 0$ en un sistema S, también $s_{12}'^2 = 0$ en otro sistema S', donde, por supuesto,

$$s_{12}'^2 = (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 - c^2(t_2' - t_1')^2.$$

Es así como la seudodistancia entre dos sucesos puede considerarse invariante si su valor es cero. Si queremos que esta propiedad de invariancia persista aun cuando el valor de la seudodistancia no sea cero, tenemos que tomar la definición (I.4) para la seudodistancia s_{12}^2 y postular que ésta permanece invariante al pasar de un sistema inercial a otro. Como hemos visto, este postulado es enteramente compatible con la hipótesis de que la velocidad de la luz es invariante.

Es importante notar que el término $(t_2 - t_1)$ en la definición (I.4) lleva un signo negativo, en contra de lo que se podría esperar generalizando directamente el teorema de Pitágoras. Por ejemplo, el hecho de que la seudodistancia entre dos sucesos sea cero no implica que éstos coincidan.

Nótese que, si la separación entre dos sucesos considerados es infinitesimal, la seudodistancia entre ellos es

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2. \tag{I.4'}$$

I.5 La transformación de Lorentz

Debemos buscar ahora la forma de una transformación de coordenadas que deje invariante el valor de s_{12}^2. Consideremos un suceso en el origen O del espaciotiempo, es decir, un suceso que ocurre en el punto de coordenadas espaciales $(0, 0, 0)$ y en el tiempo $t = 0$. La seudodistancia (al cuadrado) entre el suceso en el origen O y cualquier otro suceso con coordenadas (x, y, z, ct) es, por definición,

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2. \tag{I.5}$$

Queremos encontrar una transformación de un sistema cartesiano de coordenadas (x, y, z, ct) a otro sistema de coordenadas (x', y', z', ct') tal que $s^2 = s'^2$, donde

$$s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2.$$

Existe un problema análogo en geometría clásica: ¿cuál es la transformación que deja invariante la distancia

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{I.6}$$

(en coordenadas cartesianas) entre el origen y el punto (x, y, z)?

La respuesta es *una rotación de ejes*. En general una rotación arbitraria se puede descomponer en una combinación de rotaciones en los planos xy, yz y zx. Por ejemplo, la rotación por un ángulo θ en el plano xy está dada por la transformación (figura I.3)

$$\begin{aligned} x \to x' &= x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta, \\ y \to y' &= -x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta, \\ z \to z' &= z, \end{aligned} \tag{I.7}$$

y deja invariante la distancia $x^2 + y^2$, que es igual a $x'^2 + y'^2$, como puede comprobarse fácilmente.

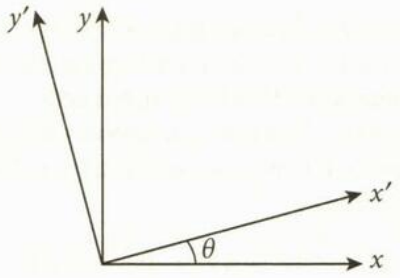


FIGURA I.3

Del mismo modo, podemos hablar de una "rotación" en el espacio-tiempo; ésta será una combinación de rotaciones en los "planos" xy, yz, zx, tx, ty, tz. Los tres primeros son rotaciones comunes como (I.7) y no representan nada nuevo. En cambio, el equivalente a una rotación en el "plano" tx debe ser una transformación de coordenadas que deje invariante a

$$s^2 = x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2. \tag{I.8}$$

Siguiendo la analogía con la transformación (I.7), hagamos

$$\begin{aligned} x' &= x\cosh\psi - ct\,\mathrm{senh}\,\psi, \quad & y' &= y \\ ct' &= -x\,\mathrm{senh}\,\psi + ct\cosh\psi, \quad & z' &= z, \end{aligned} \tag{I.9}$$

y es fácil comprobar que la condición (I.8) se satisface, ya que

$$\cosh^2\psi - \mathrm{senh}^2\,\psi = 1.$$

Identifiquemos ahora ψ. El origen del sistema S' tiene coordenada $x' = 0$, así que, de acuerdo con (I.9), el origen de S' satisface la condición

$$\frac{x}{ct} = \tanh\psi.$$

Pero, visto desde S, x/t es precisamente la velocidad V del sistema S'. Entonces

$$\frac{V}{c} = \tanh\psi$$

y, por lo tanto,

$$\mathrm{senh}\,\psi = \frac{V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$\cosh\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Introduciendo esto en la ecuación (I.9), se deduce

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{I.10}$$

Esta es la *transformación de Lorentz* a lo largo del eje x, la misma que tuvimos ocasión de conocer un poco antes (ecuación I.3, p. 22).

EJERCICIO I.2. Demuestre que la transformación inversa a la (I.10) es

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \end{aligned}$$

y justifique esta fórmula con un argumento físico.

I.6 El espacio de Minkowski

El espacio-tiempo de cuatro dimensiones es un concepto matemático perfectamente bien definido, como lo notó Minkowski[8] por primera vez poco después de que apareciera la teoría de Einstein. Lo que ahora llamamos el espacio de Minkowski es, por definición, un espacio geométrico de cuatro dimensiones en el cual las distancias entre "puntos" se miden según las fórmulas (I.4) o (I.4′) [p. 25].

Es imposible representar gráficamente un espacio de cuatro dimensiones, pero si descartamos una de las tres dimensiones espaciales y representamos sólo una o dos de ellas, dibujando el "eje" del tiempo como un eje vertical, tenemos una gráfica del espacio-tiempo como en la figura I.4.

[8] Hermann Minkowski (1864-1909), matemático alemán que sentó las bases matemáticas de la relatividad especial propuesta por Einstein.

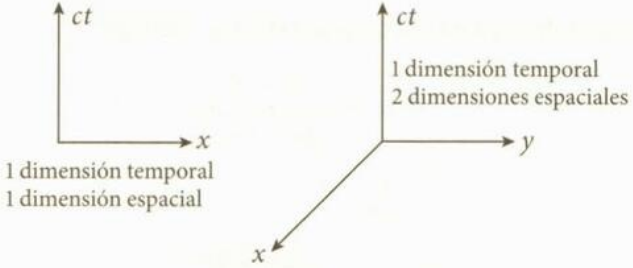


FIGURA I.4

Vimos ya que cada punto del espacio-tiempo es un suceso. Consideremos ahora la "historia de una partícula": ésta es un conjunto de sucesos que ocurren en diversos lugares del espacio. Este conjunto de sucesos es una línea en el espacio-tiempo que se llama *línea de universo*. Por ejemplo, la línea de universo de una partícula en reposo es una recta paralela al eje del tiempo, mientras que la línea de universo de una partícula que se mueve con velocidad constante V a lo largo del eje x es una recta de pendiente c/V en el plano (x, ct). Una señal luminosa tiene una línea de universo que es una recta a 45° con respecto al eje ct.

EJERCICIO I.3. Dibuje la línea de universo de una partícula que se mueve en el plano xy de la siguiente manera:

a) describiendo un círculo con velocidad constante;

b) acelerándose desde el reposo hasta alcanzar cierta velocidad, la cual ya se mantiene constante.

Uno de los resultados básicos de la teoría de la relatividad es que ningún objeto puede viajar más rápido que la luz: la velocidad de la luz es un límite natural. La razón es que, como veremos en el capítulo IV, se necesita una energía infinita para alcanzar la velocidad de la luz. Por lo pronto, podemos notar que, para $V > c$, las transformaciones de Lorentz pierden sentido físico, pues la raíz $\sqrt{1 - V^2/c^2}$ se vuelve imaginaria.

El hecho de que exista una velocidad límite en la naturaleza tiene profundas implicaciones físicas. Si ocurre cierto suceso en algún lugar y en algún momento, ese suceso puede influir sólo sobre aquellos sucesos que ocurren después: si un segundo después, dentro de un radio de 300 000 km; si dos segundos después, dentro de un radio de 600 000 km; y, en general, si un tiempo t después, dentro de un radio ct. Y lo mismo para el pasado: sobre un suceso dado sólo pueden influir aquellos sucesos que, si ocurrieron un tiempo t antes, se encontraban dentro de un radio de ct.

La situación se representa en la figura I.5. A cada suceso E podemos asociarle lo que se llama un *cono de luz:* éste es el conjunto de todos los sucesos a los cuales se puede llegar *desde* E viajando a la velocidad de la luz (cono futuro de E), o desde los cuales se puede llegar a E viajando a la velocidad de la luz (cono pasado de E).

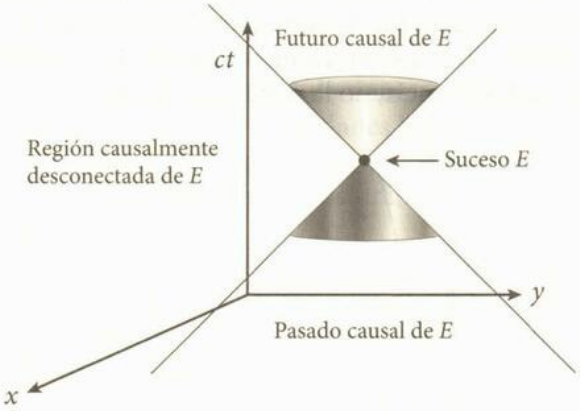


FIGURA I.5

Como nada puede viajar más rápido que la luz, el suceso E sólo podrá influir sobre los sucesos que se encuentran dentro y sobre su cono futuro, y sólo podrá ser influenciado por los sucesos que se encuentran dentro y sobre su cono pasado.

Si un suceso puede influir sobre otro a través de una señal que no viaja más rápido que la luz, se dice que esos dos sucesos están *causalmente conectados.* Así, todos los sucesos que ocurren fuera del cono de luz del suceso E estarán *causalmente desconectados* de E. Volveremos a este concepto en la sección II.5 (p. 44).

Veamos ahora una interpretación geométrica de la transformación de Lorentz. Consideremos para ello únicamente el eje espacial x, además del eje temporal ct, en un sistema inercial S. El punto $x = 0$ es el origen espacial y su línea de universo es simplemente el eje temporal. Asimismo, todos los sucesos que en el sistema S suceden en el tiempo $t = 0$ son sucesos que se encuentran sobre el eje x; en general, dos sucesos son simultáneos (ocurren en el mismo tiempo t) si se encuentran sobre una recta paralela al eje x.

Consideremos ahora un sistema S', definido por la transformación de Lorentz (I.10) [p. 27]. El origen espacial de S' es el punto $x' = 0$ y su línea de universo es, según la ecuación (I.10), la recta $x - Vt = 0$. Del mismo modo, todos los sucesos que ocurren simultáneamente en el sistema S' en el tiempo

$t' = 0$ se encuentran sobre la recta $ct - (V/c)x = 0$. Las dos rectas $x' = 0$ y $t' = 0$ son, respectivamente, el eje temporal y uno de los ejes espaciales del sistema S' (figura I.6).

Geométricamente, la transformación de Lorentz corresponde a "cerrar" los ejes (a diferencia de la rotación común que se ve en la figura I.3). Sin embargo, hay que tener cuidado con la medición de distancias en un diagrama espacio-tiempo, ya que la seudodistancia no corresponde a la distancia aparente entre dos sucesos. A diferencia de las rotaciones comunes, la transformación de Lorentz preserva la seudodistancia, no la distancia, tal como se ve en la figura I.6.

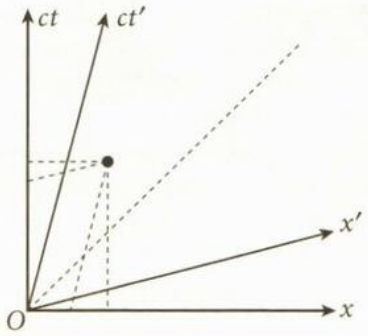


FIGURA I.6

Es evidente de la figura I.6, entre otras cosas, que dos sucesos simultáneos (que ocurren en los tiempos $t_1 = t_2 = t$) en el sistema S *no* son simultáneos en el sistema S' (ocurren en los tiempos $t'_1 \neq t'_2$). Así, en la teoría de la relatividad, *simultaneidad es un concepto relativo*. Este hecho tiene consecuencias muy importantes, como veremos en el siguiente capítulo.

II. CINEMÁTICA Y ÓPTICA RELATIVISTAS

Una de las consecuencias más inmediatas de la transformación de Lorentz es que las mediciones del tiempo y del espacio dependen del sistema en que se realizan. Si no percibimos variaciones de tiempo o de espacio en nuestra experiencia cotidiana, es porque las velocidades humanas son extremadamente pequeñas con respecto a la velocidad de la luz. Si la velocidad de la luz fuera mucho menor de lo que es, estaríamos acostumbrados a variaciones del tiempo o de la simultaneidad.

El espacio y el tiempo son conceptos relativos, pero esto no quiere decir que la medición del tiempo o del espacio no puedan definirse con precisión. Después de todo, el concepto de relatividad se encuentra incluso en la mecánica de Galileo y Newton. La posición de un punto siempre se mide con relación a algún sistema de referencia, lo cual no implica que la posición sea un concepto vacío. Einstein, con su teoría, extendió la relatividad a la medición del tiempo.

II.1 Contracción del tiempo y del espacio

II.1.1 Contracción del tiempo

Sean dos sucesos E_1 y E_2 que ocurren en un mismo lugar (por ejemplo $x = 0$) en los tiempos 0 y t respectivamente. Vistos desde un sistema S', estos dos sucesos ocurren, según la cuarta de las ecuaciones (I.10) [p. 27], en los tiempos

$$t' = 0 \qquad \text{y} \qquad t' = \frac{t}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{II.1}$$

respectivamente. Vemos de estas ecuaciones que el tiempo $\Delta t' = t' - 0$ entre dos sucesos medidos desde el sistema S' es *mayor* que el tiempo $\Delta t = t - 0$ medido en el sistema en que los dos sucesos ocurren en el *mismo lugar*.

El tiempo medido en un reloj es una cantidad física perfectamente bien definida, aunque no coincida con el tiempo medido desde otros sistemas. Para ver esto más detalladamente, regresemos al concepto de espacio de Minkowski y notemos que la seudodistancia al cuadrado entre dos sucesos, definida por

la ecuación (I.4) [p. 24], puede tomar valores tanto positivos como negativos. Es fácil ver que

$$s_{12}^2 \leq 0 \qquad \text{o} \qquad s_{12}^2 > 0,$$

según si los dos sucesos están causalmente conectados o no.

EJERCICIO II.1. Demuestre la afirmación anterior.

Consideremos dos sucesos que, en un sistema S, ocurren en el *mismo lugar*, pero en tiempos t_1 y t_2 distintos. La seudodistancia entre esos dos sucesos será

$$s_{12}^2 = -c^2(t_2 - t_1)^2;$$

o sea, $\sqrt{-s_{12}^2}\,/c$ es el tiempo medido por un reloj que está fijo en S. Si ahora definimos el *tiempo propio* entre dos sucesos como

$$\tau_{12} = \frac{\sqrt{-s_{12}^2}}{c}$$

o, en forma diferencial,

$$d\tau = \frac{\sqrt{-ds^2}}{c},$$

vemos que el tiempo así definido es invariante frente a una transformación de Lorentz y corresponde exactamente al tiempo medido, $t_2 - t_1$ (o dt) en el sistema S en el que el reloj está estacionado.

En general, un observador provisto de un reloj que describe una trayectoria

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

en algún sistema de referencia S tendrá velocidad $\mathbf{v} = d\mathbf{r}(t)/dt$ (no necesariamente constante) en ese sistema S; el tiempo propio medido en su reloj estará dado por

$$\begin{aligned}\tau_{12} &= \frac{1}{c}\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{-ds^2} \\ &= \frac{1}{c}\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{-|d\mathbf{r}|^2 + c^2\,dt^2},\end{aligned}$$

donde los tiempos t_1 y t_2 son dos tiempos medidos en el sistema fijo S (figura II.1). Ahora bien, como $d\mathbf{r} = \mathbf{v}\,dt$, la última ecuación toma la forma

$$\tau_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}\; dt. \tag{II.2}$$

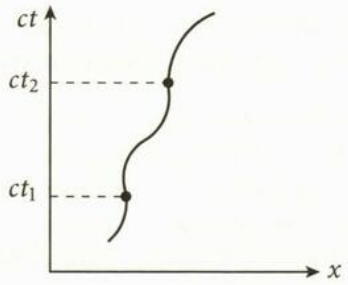


FIGURA II.1

Así, el tiempo propio de un reloj es la seudolongitud de la línea de universo que describe ese reloj. En el caso particular en que la velocidad v es constante, obtenemos la fórmula para el tiempo propio

$$\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

que ya habíamos encontrado con anterioridad. Pero es importante notar que la ecuación (II.2) es válida para cualquier velocidad, incluso no constante.

EJERCICIO II.2. Visto desde un sistema inercial S, una partícula se mueve en un círculo de radio R con velocidad angular Ω (R y Ω medidos en S). Demuestre, a partir de la ecuación (II.2), que el tiempo propio de la partícula se reduce en un factor $\sqrt{1 - \Omega^2 R^2/c^2}$ con respecto al tiempo medido en S.

EJERCICIO II.3. El muón (μ) es una partícula elemental que se puede producir al llegar un rayo cósmico a los estratos más altos de la atmósfera terrestre. La vida media de los muones es de aproximadamente 2×10^{-6} segundos, y se han detectado con velocidades del orden de 0.997 veces la velocidad de la luz. Aun a esa velocidad, su vida media no le permitiría recorrer más que unos seiscientos metros, según la física clásica. Demuestre que, de acuerdo con la teoría de la relatividad, la distancia que recorre es mucho mayor y suficiente para llegar a la superficie de la Tierra.

EJERCICIO II.4. (Paradoja de los gemelos.) Pedro y Pablo son dos gemelos. Un día, Pedro aborda una nave espacial que lo lleva, a una velocidad cercana a la de la luz, a una estrella distante L años luz.[1] Demuestre que, a su regreso, Pedro es más joven que su hermano Pablo, quien se quedó en la Tierra. ¿Cuál es la diferencia de edades, en función de V (constante) y L? Desprecie los tiempos de aceleración y desaceleración de la nave.

EJERCICIO II.5. Dos observadores O y O' se mueven con velocidad relativa constante V. En el momento de cruzarse, sincronizan sus relojes. O' emite una señal

[1] Un año luz es la distancia que recorre la luz en un año y equivale a 9.46×10^{12} kilómetros.

luminosa en el tiempo t' en su sistema, que O recibe en el tiempo t en el suyo. Encuentre la relación entre t' y t (haga un diagrama en el espacio-tiempo).

El problema de los gemelos (ejercicio II.4) implica una aparente paradoja. En efecto, si la velocidad de la nave espacial es constante, entonces tanto Pedro en su nave, como Pablo en la Tierra, están en sistemas inerciales y existe una perfecta simetría entre los dos. Debido al principio de la relatividad, Pedro puede afirmar que él se mantiene inmóvil y que es Pablo quien se mueve junto con la Tierra. Según esto, Pablo debe ser más joven que Pedro en el momento del reencuentro, y no al revés. ¿Cuál es la solución a la paradoja?

Por lo pronto, hay que notar que sí hay una diferencia esencial entre los movimientos de Pedro y Pablo. En algún momento, la nave espacial de Pedro debe frenar para dar vuelta y regresar a la Tierra. Durante el tiempo que dura esa maniobra, la nave deja de ser un sistema inercial: aparecen fuerzas inerciales que Pedro nota. Evidentemente, nada parecido ocurre en la Tierra, por lo que la historia de Pedro y Pablo no son exactamente equivalentes.

Sin embargo, el razonamiento anterior sólo resuelve parcialmente la paradoja, pues el tiempo que dura la maniobra de frenar y dar vuelta a la nave puede ser, en principio, arbitrariamente corto. ¿Cómo puede un suceso breve influir drásticamente sobre la historia de Pedro y Pablo?

Para resolver por completo la paradoja, es necesario aclarar qué es lo que *observan* realmente los gemelos. Esto lo analizaremos a continuación.

Tiempo observado. Supongamos que en el tiempo $t = 0$ en la Tierra, una nave espacial se encuentra a una distancia L y, justo en ese momento (suceso A), emite una señal luminosa. Esa señal llega a la Tierra en el tiempo $t_1 = L/c$. Después, la nave emite una segunda señal luminosa (suceso B) en el tiempo t_B de la Tierra; esa señal llega a la Tierra en el tiempo t_2.

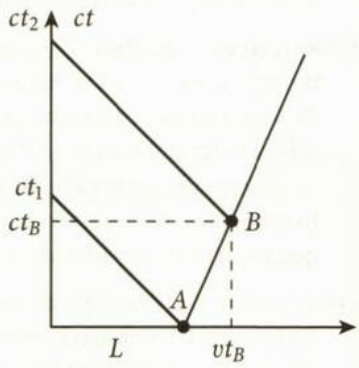


FIGURA II.2

Si la nave se está alejando con una velocidad v, la segunda señal habrá sido emitida desde una distancia $L + vt_B$.

De la figura II.2 es fácil ver que

pasa porque la pendiente es 1, porque es luz

$$ct_1 = L$$
$$ct_2 - ct_B = L + vt_B,$$

de donde resulta

$$t_B = \frac{c}{c+v} t_{12},$$

siendo $t_{12} = t_2 - t_1$ el tiempo medido en la Tierra entre las recepciones de las dos señales. Por otra parte, el tiempo τ_{AB} medido en la nave entre los sucesos A y B es

$$\tau_{AB} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, t_B$$

debido a la contracción del tiempo. Combinando las dos últimas ecuaciones llegamos al resultado

$$\tau_{AB} = \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}\, t_{12}. \qquad \text{(II.3)}$$

Esta fórmula implica que un reloj en movimiento se observa caminando más lentamente si se aleja, y más rápidamente si se acerca. ¡El tiempo observado depende de la dirección de la velocidad! En cambio, el tiempo propio siempre es más corto que el tiempo medido en otro sistema.

Supongamos que una nave espacial lleva una cámara de televisión que permite observar su interior desde la Tierra. De acuerdo con la fórmula (II.3), determinado intervalo de tiempo transcurrido en la nave se verá, en la Tierra, multiplicado por un factor $\sqrt{c + v}/\sqrt{c - v}$. Si la nave se aleja, este factor es mayor que 1, y, en consecuencia, todo lo que sucede en la nave se ve como en "cámara lenta". Del mismo modo, si la nave se acerca, lo que sucede en ella se ve como en "cámara rápida". Esta situación es perfectamente simétrica: lo mismo verán los tripulantes de la nave si observan lo que sucede en la Tierra.

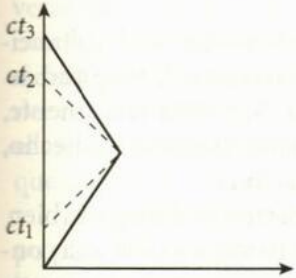


FIGURA II.3

Con las consideraciones anteriores, podemos regresar a la paradoja de los gemelos. Veamos, en la figura II.3, el diagrama de espacio-tiempo referido al sistema de la Tierra, en el que se observa la línea de universo de la nave espacial en la que viaja Pedro.

Durante la primera mitad de su viaje, Pedro ve lo que sucede en la Tierra en "cámara lenta", y esto corresponde al lapso comprendido entre $t = 0$ y $t = t_1$ en la Tierra. Durante la segunda mitad de su viaje, Pedro ve la Tierra en "cámara rápida", lo cual corresponde al periodo comprendido entre $t = t_1$ y $t = t_3$.

En cambio, Pablo, que se quedó en la Tierra, ve a su hermano alejándose la mayor parte del tiempo, de $t = 0$ a $t = t_2$, y por lo tanto, en "cámara lenta". Después, durante un lapso de tiempo corto, de $t = t_2$ a $t = t_3$, lo ve en "cámara rápida", hasta que se vuelven a encontrar. Es evidente que lo que *observan* los dos gemelos no es simétrico, con lo cual se resuelve la paradoja.

EJERCICIO II.6. Siguiendo el análisis anterior, calcule los dos intervalos de tiempo ($t = t_1$ a $t = t_3$) medidos en la nave, y compruebe que la suma de los dos es consistente con el resultado que obtuvo en el ejercicio II.4 (p. 33).

II.1.2 Contracción de Lorentz

De acuerdo con la teoría de la relatividad, se podría pensar que un cuerpo en movimiento sufre una contracción; sin embargo, ha habido mucha confusión sobre este efecto. En primer lugar, no se trata de una contracción real, sino de cómo se percibe el tamaño de un cuerpo en un sistema de referencia en el que éste aparece en movimiento.

Medir la longitud de una barra equivale a medir la distancia entre sus dos extremos. Es evidente que si la barra se mueve, la posición de sus dos extremos debe determinarse *simultáneamente* para que la medición tenga sentido (obviamente no se puede medir el largo de un coche en movimiento marcando en el suelo la posición de su parte delantera primero, y más tarde la posición de su parte trasera).

Lo anterior es trivial en mecánica clásica, pues no hay ambigüedad sobre la medición del tiempo, pero la situación se complica si la velocidad de la barra es suficientemente alta para que aparezcan los efectos relativistas. Si en un sistema de referencia determinamos la posición de los dos extremos de la barra en el mismo tiempo, ese mismo par de mediciones no habrán ocurrido simultáneamente en otro sistema de referencia que se mueve con respecto al primero.

Como ya vimos anteriormente, en la teoría de la relatividad, la simultaneidad es un concepto relativo. Por lo tanto, si insistimos en definir la longitud de una barra como la distancia entre sus dos extremos, medida simultáneamente, esa longitud debe ser distinta para quien ve la barra en movimiento. De hecho, se produce una contracción, como veremos a continuación.

Debemos insistir, sin embargo, en que esta contracción se debe más bien a la definición misma de longitud y a la relatividad del tiempo, y no a una contracción real, en la que los átomos de la barra se compriman. La supuesta contracción de los cuerpos en movimiento ha sido fuente de muchas confusiones y es el tema favorito de los aficionados a la física que intentan refutar la teoría de la relatividad buscándole contradicciones.

Por definición, la distancia entre dos puntos debe medirse simultáneamente aunque el concepto de simultaneidad dependa del observador. Sin embargo, lo que se puede definir sin ambigüedad es la *longitud propia*, que es la longitud de un objeto medido en el sistema en que está en reposo.

Supongamos que una barra está en reposo en el sistema S', y sean x'_1 y x'_2 las coordenadas de sus extremos (escogemos el eje x' a lo largo de la barra). La *longitud propia* de la barra —es decir, la medida en su sistema en reposo— es

$$L_0 = x'_2 - x'_1. \tag{II.4}$$

En un sistema S que se mueve a lo largo del eje x', la barra se verá moviéndose con cierta velocidad V, que es la de S con respecto a S'. Según la transformación de Lorentz,

$$x'_1 = \frac{x_1 + Vt_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \qquad x'_2 = \frac{x_2 + Vt_2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{II.5}$$

Por definición, la longitud de la barra en el sistema S es la distancia entre las puntas de la barra, x_1 y x_2, medida *simultáneamente* en el tiempo $t = t_1 = t_2$. Entonces $L = x_2 - x_1$, y según las ecuaciones (II.4) y (II.5),

$$L = L_0\sqrt{1 - V^2/c^2}. \tag{II.6}$$

Ésta es la fórmula para la contracción de Lorentz de las distancias.

Es importante señalar que esta contracción *no* es directamente observable y *no* debe confundirse con la apariencia óptica de los objetos en movimiento. Incluso si no se toman en cuenta efectos relativistas de contracción de tiempo, un cuerpo que se mueve con una velocidad comparable con la de la luz debe verse deformado. Esto se debe a que la luz recibida simultáneamente de un objeto en movimiento no partió simultáneamente de todas sus partes. Si, por ejemplo, el cuerpo se aleja, la luz necesita un poco más de tiempo para viajar del extremo delantero al observador que del extremo trasero; en consecuencia, el cuerpo se ve más corto de lo que es realmente. Del mismo modo, un cuerpo que se acerca se ve más largo de lo que es en realidad.

El efecto anterior debe combinarse con la contracción relativista del tiempo para deducir qué apariencia tiene un cuerpo cuya velocidad es cercana a la luminosa. El resultado es muy curioso, aunque de poca relevancia práctica. Se puede demostrar, por ejemplo, que una esfera en movimiento sigue viéndose como esfera, pero una barra aparece doblada. También se ha demostrado que un objeto lejano (cuyo tamaño aparente es pequeño) no se ve deformado ni contraído; por ejemplo, un cubo en movimiento sigue viéndose como cubo, pero rotado.[2]

[2] Véase, *v. gr.*, el artículo de V. F. Weisskopf en *Physics Today*, septiembre de 1960, p.24.

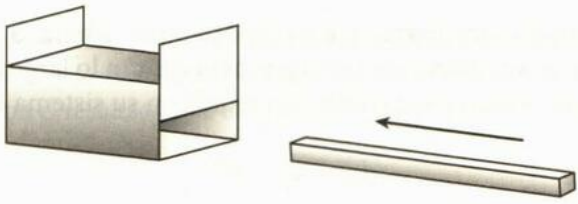


FIGURA II.4

EJERCICIO II.7. Sea una barra de longitud propia L_0 que se mueve con cierta velocidad y atraviesa una caja de la misma longitud propia L_0. Debido a la contracción de Lorentz, la barra mide menos que L_0 y puede quedar atrapada dentro de la caja. Sin embargo, para un observador montado en la barra, es la caja la que se mueve y, por lo tanto, se contrae: la caja mide menos que L_0 y no puede atrapar a la barra (figura II.4). Resuelva la paradoja.

Como el lector habrá notado ya, el factor $(1 - V^2/c^2)^{-1/2}$ aparece frecuentemente en la teoría de la relatividad, así que de ahora en adelante usaremos la definición del *factor de Lorentz:*

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{II.7}$$

Este factor vale prácticamente 1 para velocidades bajas, es siempre mayor que 1 y se vuelve infinito para $V = c$.

II.2 TRANSFORMACIÓN DE VELOCIDADES

Veamos ahora cómo se transforman las velocidades en relatividad. Es evidente que no se van a sumar simplemente, como en mecánica clásica, pues ya vimos que, en el caso de la luz, su velocidad es invariante.

Por definición, la velocidad $\mathbf{v}$ en el sistema S es la derivada de la posición con respecto al tiempo, todo medido en S. Explícitamente, en S:

$$\mathbf{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right),$$

mientras que en el sistema S':

$$\mathbf{v}' = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}\right).$$

Busquemos una relación entre las componentes de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}'$. Si diferenciamos las ecuaciones (I.10) [p. 27] para la transformación de Lorentz, tenemos

$$\begin{aligned} dx' &= \gamma(dx - V\,dt) \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \\ dt' &= \gamma\Big(dt - \frac{V}{c^2}\,dx\Big), \end{aligned}$$

de donde

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - V\,dt}{dt - (V/c^2)\,dx} = \frac{(dx/dt) - V}{1 - (V/c^2)(dx/dt)}$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \gamma^{-1}\frac{dy}{dt - (V/c^2)\,dx} = \gamma^{-1}\frac{(dy/dt)}{1 - (V/c^2)(dx/dt)}.$$

Resulta, por lo tanto, que

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - V}{1 - Vv_x/c^2} \\ v'_y &= \gamma^{-1}\frac{v_y}{1 - Vv_x/c^2} \\ v'_z &= \gamma^{-1}\frac{v_z}{1 - Vv_x/c^2}. \end{aligned} \tag{II.8}$$

EJERCICIO II.8. Demuestre, con las ecuaciones (II.8), que si

$$v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z = c^2,$$

entonces también

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = c^2;$$

es decir, la velocidad de la luz es c en cualquier sistema.

EJERCICIO II.9. Es bien sabido que la velocidad de la luz en un medio material transparente es menor que en el vacío. ¿Puede un medio material arrastrar la luz consigo? En el siglo XIX, para responder a esta pregunta, se midió la velocidad de la luz que pasa por un tubo en el que un líquido fluye con velocidad V. Se encontró empíricamente que la velocidad v de la luz así medida está dada por

$$v = c' + (1 - n^{-2})V,$$

donde c' es la velocidad de la luz en el líquido *en reposo* y n es el índice de refracción ($n = c/c'$). Demuestre que esta fórmula es consecuencia directa de las ecuaciones (II.8). La clave es colocarse en el sistema en reposo del fluido, y luego regresar al sistema del laboratorio (recuerde que $V \ll c$).

II.3 Aberración óptica

El ángulo de inclinación con el que se reciben los rayos luminosos depende de la velocidad del observador. Si este ángulo es α en un sistema S, será α' en un sistema S' que se mueve con velocidad V con respecto al primero. El hecho de que α y α' no sean iguales se llama *aberración óptica*. Vamos a calcular la relación entre α y α'.

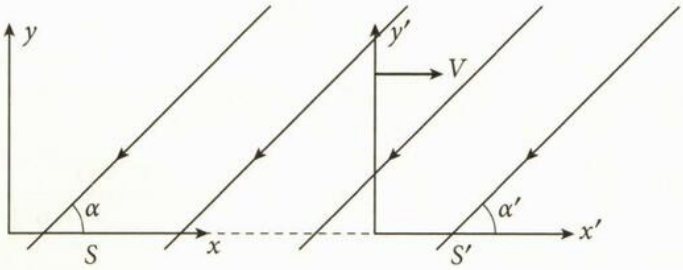


Figura II.5

Según la figura II.5, las componentes x y y de la velocidad del rayo luminoso en el sistema S son

$$c_x = -c\cos\alpha \qquad c_y = -c\,\mathrm{sen}\,\alpha,$$

y en S',

$$c'_x = -c\cos\alpha' \qquad c'_y = -c\,\mathrm{sen}\,\alpha'.$$

Estas componentes no son invariantes por separado; sólo es invariante la *magnitud* de la velocidad de la luz. Usando las ecuaciones (II.8), resulta

$$\mathrm{sen}\,\alpha' = \frac{\gamma^{-1}\,\mathrm{sen}\,\alpha}{1+(V/c)\cos\alpha}$$

$$\cos\alpha' = \frac{\cos\alpha + (V/c)}{1+(V/c)\cos\alpha}.$$

Si utilizamos la fórmula trigonométrica

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{1+\cos\theta},$$

podemos escribir la fórmula de la aberración en una forma compacta:

$$\tan\frac{\alpha'}{2} = \sqrt{\frac{c-V}{c+V}}\tan\frac{\alpha}{2}. \qquad \text{(II.9)}$$

Esta fórmula permite encontrar en forma gráfica el ángulo de aberración. Supongamos que un observador en O ve una estrella a un ángulo α con respecto al horizonte, y otro observador que se mueve con velocidad V respecto al primero ve la estrella a un ángulo α'. El método geométrico para localizar la posición de la estrella en S' es el siguiente: trace un círculo alrededor de O, busque la tangente de $\alpha/2$, multiplíquelo por $\sqrt{c-V}/\sqrt{c+V}$ para encontrar primero $\alpha'/2$ y luego α' (figura II.6).

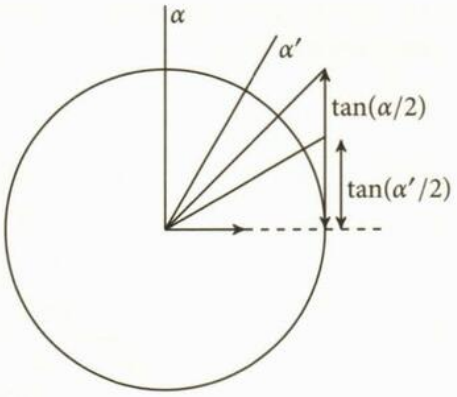


FIGURA II.6

EJERCICIO II.10. Utilice la construcción anterior para la aberración óptica con el fin de deducir, en forma cualitativa, cómo se vería el cielo estrellado desde una nave espacial que se mueve a velocidad cercana a la de la luz. Demuestre que las estrellas se ven concentradas en la dirección hacia la cual se mueve la nave, mientras que el cielo parece despoblado en la dirección opuesta.

II.4 Efecto Doppler

La sirena de una ambulancia se oye más aguda cuando se acerca, y más grave cuando se aleja. Esto se debe a que las ondas sonoras provenientes de un emisor en movimiento se reciben con una longitud de onda que disminuye o aumenta según si el emisor se acerca o se aleja. Este fenómeno se conoce como *efecto Doppler*.

El efecto Doppler se aplica a cualquier tipo de onda, incluyendo la luz. Una fuente luminosa que se aleja o se acerca a gran velocidad se ve más roja o más azul, respectivamente. A continuación vamos a calcular cómo varía la longitud de onda emitida por una fuente en movimiento arbitrario.

Consideremos un observador que está fijo en $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, en el sistema S, y que observa una partícula que emite luz. En el tiempo t_{em} la partícula emite una señal luminosa que el observador recibe en el tiempo t_{obs}. Luego, una segunda señal es emitida un tiempo Δt_{em} después y recibida por el observador un tiempo Δt_{obs} después de t_{obs}. Todas estas cantidades están medidas en el sistema en reposo del observador. ¿Cómo se relacionan Δt_{em} y Δt_{obs}?

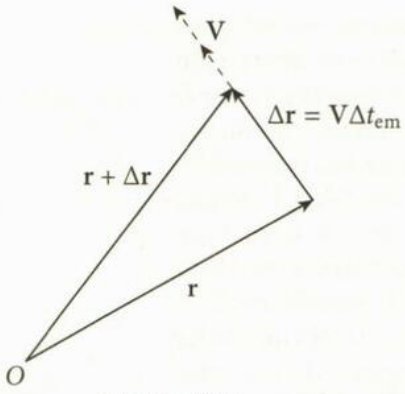


FIGURA II.7

De la figura II.7 se ve que

$$c(t_{\text{obs}} - t_{\text{em}}) = |\mathbf{r}| \tag{II.10}$$

$$c(t_{\text{obs}} + \Delta t_{\text{obs}} - t_{\text{em}} - \Delta t_{\text{em}}) = |\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}|. \tag{II.10′}$$

Vamos a suponer que el emisor está lo suficientemente alejado para poder hacer la aproximación

$$|\Delta\mathbf{r}| \ll |\mathbf{r}|.$$

En este caso,

$$|\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}| = (|\mathbf{r}|^2 + |\Delta\mathbf{r}|^2 + 2\mathbf{r} \cdot \Delta\mathbf{r})^{1/2} \approx |\mathbf{r}| + \frac{\mathbf{r} \cdot \Delta\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = |\mathbf{r}| + \hat{e}_r \cdot \Delta\mathbf{r},$$

donde $\hat{e}_r$ es un vector unitario en la dirección $\mathbf{r}$.

Usando esta fórmula y restando (II.10) de (II.10′), resulta

$$c(\Delta t_{\text{obs}} - \Delta t_{\text{em}}) = \hat{e}_r \cdot \Delta\mathbf{r},$$

y como $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{V}\Delta t_{\text{em}}$, se tiene que

$$\Delta t_{\text{obs}} = \left(1 + \hat{e}_r \cdot \frac{\mathbf{V}}{c}\right)\Delta t_{\text{em}}. \tag{II.11}$$

Recordemos que todas las cantidades en esta fórmula se refieren al sistema S en el que O está en reposo.

El intervalo de tiempo Δt_{em} medido por el observador corresponde al intervalo de tiempo propio $\Delta\tau_{\text{em}}$ medido por el emisor, y estos dos tiempos están relacionados por la fórmula

$$\Delta\tau_{\text{em}} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2} \Delta t_{\text{em}}.$$

Combinando con la ecuación (II.11) se obtiene

$$\Delta t_{\text{obs}} = \frac{1 + \hat{e}_r \cdot \mathbf{V}/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \Delta\tau_{\text{em}}. \tag{II.12}$$

Esta fórmula relaciona el intervalo de tiempo $\Delta\tau_{\text{em}}$ medido en el sistema del emisor, con el intervalo correspondiente Δt_{obs} medido por el observador.

Supongamos que el emisor emite una luz con frecuencia ν_{em}; esta frecuencia será igual al número de máximos (o mínimos) de la onda luminosa emitidos entre τ_{em} y $\tau_{\text{em}} + \Delta\tau_{\text{em}}$, dividido entre $\Delta\tau_{\text{em}}$. Ese mismo número de máximos o mínimos será recibido en O, pero en el intervalo de tiempo Δt_{obs}. Esto implica que la frecuencia observada es, según la ecuación (II.12),

$$\nu_{\text{obs}} = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \hat{e}_r \cdot \mathbf{V}/c} \nu_{\text{em}}. \tag{II.13}$$

Ésta es la fórmula relativista para el efecto Doppler.

Tres casos típicos se muestran en la figura II.8. En el primer caso, la fuente se mueve directamente hacia el observador y éste mide una frecuencia mayor, dada por

$$\nu_{\text{obs}} = \sqrt{\frac{c + V}{c - V}} \nu_{\text{em}}.$$

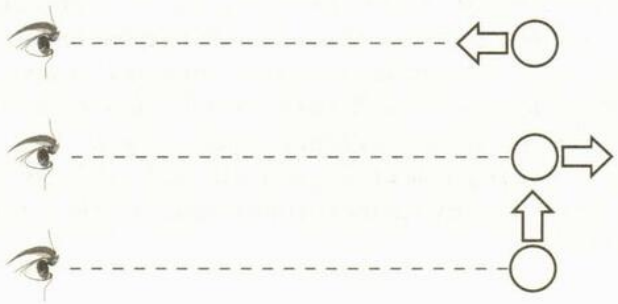


FIGURA II.8

En el segundo caso, la fuente está en recesión y la frecuencia observada es menor:

$$\nu_{\text{obs}} = \sqrt{\frac{c - V}{c + V}}\,\nu_{\text{em}},$$

por lo que la luz se ve enrojecida (corrida hacia el lado rojo del espectro). Nótese que para velocidades bajas $V \ll c$, los tres casos son, respectivamente,

$$\nu_{\text{obs}} = \left(1 + \frac{V}{c}\right)\nu_{\text{em}}, \qquad \nu_{\text{obs}} = \left(1 - \frac{V}{c}\right)\nu_{\text{em}}, \qquad \nu_{\text{obs}} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\nu_{\text{em}}.$$

El tercer caso (efecto Doppler transversal) es de orden $(V/c)^2$ y es un efecto puramente relativista.

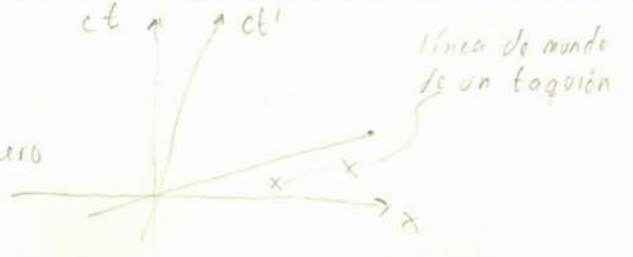
El efecto Doppler es de fundamental importancia en astronomía. A fines de los años veinte del siglo pasado, el astrónomo Edwin Hubble descubrió que las líneas espectrales de las galaxias lejanas están sistemáticamente corridas hacia el lado rojo del espectro, y que, además, existe una relación directa entre este corrimiento y la distancia de una galaxia.[3] Si se acepta el hecho de que el corrimiento de las líneas espectrales galácticas se debe al efecto Doppler, la conclusión es que el Universo está en expansión.

II.5 Taquiones y máquinas del tiempo

En la teoría de la relatividad, el concepto de simultaneidad no tiene sentido absoluto. Como ya señalamos, si dos sucesos ocurren en tiempos $t_1 = t_2$ en un sistema de referencia S, esos mismos sucesos ocurrirán en tiempos $t_1' \neq t_2'$ en otro sistema de referencia S'.

En cambio, lo que sí tiene sentido absoluto es el orden causal. Si el suceso B está en el futuro causal de A, entonces cualquier transformación de Lorentz deja sin alterar ese orden causal, ya que B seguirá estando en el futuro de A. Lo único que se altera al pasar de un sistema a otro es el tiempo transcurrido entre A y B. Dicho de otro modo, B está dentro del cono de luz futuro de A, y esto no se altera por ninguna transformación de Lorentz.

Del mismo modo, se puede decir que A está dentro del cono de luz pasado de B, y seguirá dentro de ese cono independientemente de la transformación de Lorentz que se haga.



[3] Véase el capítulo x.

en el diagrama de Minkowski hay que retroceder en el tiempo en S'

Pero si A y B *no* están causalmente conectados, es decir, si B está fuera de los conos de luz, tanto futuro como pasado, de A, entonces el orden causal depende del sistema de referencia. Si A y B ocurren en tiempos t_A y t_B en determinado sistema y $t_B > t_A$, entonces siempre habrá otros sistemas en los que ocurran en tiempos t'_A y t'_B tales que $t'_B < t'_A$.

Algunas veces se ha especulado sobre la posibilidad de que existan partículas que viajen más rápidamente que la luz. A esas hipotéticas partículas hasta se les ha dado un nombre: *taquiones* (del griego $\tau\alpha\chi\acute{\upsilon}\varsigma$, *tajís*: veloz). Como veremos en el capítulo siguiente, es necesario invertir una cantidad infinita de energía para que una partícula masiva alcance la velocidad de la luz. Sin embargo, se puede especular que algún fenómeno desconocido, quizá relacionado con efectos cuánticos, permita rebasar esa barrera natural en alguna forma no prevista por la física actual. Incluso podrían existir taquiones desde que se formó el Universo, cuando las leyes de la física eran totalmente distintas de las que conocemos. Pero aun en ese caso nos enfrentamos a problemas conceptuales de fondo, relacionados con el hecho de que el orden temporal entre dos sucesos no es invariante si estos sucesos no están relacionados causalmente.

Supongamos que un observador a posee un emisor de taquiones, y un observador b (que, por simplificación, tomamos en reposo con respecto a a) posee un receptor de taquiones. El observador a manda una señal taquiónica (suceso A), que b recibe (suceso B). Si el lector dibuja un diagrama de espacio-tiempo se convencerá fácilmente de que b primero ve la recepción del taquión (suceso B) y después su emisión (suceso A). El orden temporal entre dos sucesos causalmente desconectados no es un orden absoluto, y, por lo tanto, el concepto de pasado y futuro para un taquión es relativo. Un taquión "viaja" hacia el futuro o hacia el pasado según la velocidad de quien lo observe.

En cambio, si se transmiten partículas normales cuya velocidad no excede la luminosa, entonces la emisión (A) antecede siempre a la recepción (B) para cualquier observador (haga un diagrama para comprobarlo).

Lo anterior se manifiesta en forma más impresionante si consideramos el siguiente ejercicio:

EJERCICIO II.11. Sea un emisor de partículas que las lanza a una velocidad v con respecto a un sistema en reposo, que llamaremos S. Desde S se lanza una partícula a un observador que se aleja con velocidad V del emisor. Ese observador también lleva un emisor idéntico al primero. Cuando el observador recibe la partícula que le enviaron responde inmediatamente lanzando otra partícula con velocidad $-v$ para él, pero velocidad

$$\frac{-v+V}{1-vV/c^2}$$

en el sistema S. Esa segunda partícula se recibe en el sistema S un tiempo t después de haberse lanzado la primera partícula. Demuestre que

$$t = L\frac{V}{v(v-V)}\left(2\frac{v}{V} - 1 - \frac{v^2}{c^2}\right),$$

donde L es la distancia recorrida por la partícula medida en el sistema S. Ahora puede probar, utilizando esta fórmula, que si se lanzan taquiones con velocidad $v > c$, entonces siempre se puede encontrar una velocidad V para el observador en movimiento tal que

$$c > V > \frac{2v}{1 + v^2/c^2},$$

para la cual t *es negativo*. ¡La señal de respuesta llega *antes* de emitirse el primer taquión!

De lo anterior vemos que, si existieran los taquiones, sería posible comunicarse con el pasado. La existencia de taquiones es equivalente a la posibilidad de construir "máquinas del tiempo". Por ejemplo, imaginemos que en el futuro se inventara un "teletransportador" que permitiera a un viajero espacial desaparecer en la Tierra y materializarse en algún lugar lejano, implicando un desplazamiento a mayor velocidad que la luz. Nuestro viajero podría llevarse un teletransportador consigo para poder regresar a la Tierra. Pero, en ese caso, cabe la posibilidad de que inicie su retorno desde un planeta en movimiento tal que ¡regrese antes de haber salido!

Invertir la dirección del tiempo no parece ser factible, más por razones lógicas que por motivos físicos (por ejemplo, uno podría regresar al pasado y "asesinarse" a sí mismo de niño). De hecho, el problema de definir la dirección del tiempo aún no está resuelto satisfactoriamente, ya que las leyes de la física son invariantes frente a inversiones del tiempo, y la dirección temporal aparece únicamente en forma estadística a través de la segunda ley de la termodinámica. Sin embargo, un análisis de este tema nos llevaría demasiado lejos de la relatividad. Por ahora, basta señalar que, debido a la especial geometría del espacio-tiempo relativista, un viaje en el espacio a mayor velocidad que la luz es enteramente equivalente a un viaje hacia atrás en el tiempo, con todo y sus contradicciones inherentes.

II.6 Aceleración uniforme

En la mecánica no relativista, una partícula que se mueve con aceleración constante posee, en el tiempo t, una velocidad $v = at$, y ha recorrido una distancia

$x = at^2/2$, si suponemos que el tiempo y las coordenadas se escogen de tal manera que $v = 0 = x$ en el tiempo $t = 0$.

En la teoría de la relatividad, debemos tomar en cuenta que la velocidad no puede aumentar indefinidamente. En el capítulo siguiente presentaremos una definición rigurosa de movimiento uniformemente acelerado y relativista, pero por ahora podemos considerar la siguiente línea de universo en el espacio de Minkowski:

$$x = \sqrt{c^2t^2 + c^4/a^2},$$

que corresponde a una hipérbola en el plano (x, ct).

EJERCICIO II.12. Demuestre que esta misma trayectoria se puede describir en términos de las ecuaciones paramétricas

$$t = \frac{c}{a}\operatorname{senh}\left(\frac{a}{c}\tau\right) \qquad \text{y} \qquad x = \frac{c^2}{a}\cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right). \tag{II.14}$$

Identifique τ como el tiempo propio de la partícula. Calcule la velocidad v de la partícula en función de τ y compruebe que $v \to c$ cuando $\tau \to \infty$. Haga un diagrama de espacio-tiempo de este movimiento. Demuestre que se recuperan las fórmulas clásicas para aceleración uniforme en el límite $v \ll c$ (con una translación $x \to x + c^2/a$), con lo cual se identifica a como la aceleración.

EJERCICIO II.13. Demuestre que, al hacer una transformación de Lorentz a un sistema de referencia que se mueve con velocidad $v = c\tanh(a\tau_0/c)$ (constante), las ecuaciones (II.14) no cambian su forma y solamente $\tau \to \tau + \tau_0$. Esto implica que, en todo momento, se puede encontrar un sistema de referencia inercial en el que una partícula parece estar *instantáneamente* en reposo, pero sujeta a una aceleración que es la misma en cada punto de su trayectoria.

EJERCICIO II.14. La manera más cómoda de realizar un viaje interestelar es en una nave espacial que se mueva con aceleración constante $a \approx g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$, ya que los pasajeros se sentirían como si estuvieran en el campo gravitacional de la Tierra. Suponga que la nave espacial emprende un viaje a una estrella que se encuentra a L años luz de distancia: la nave parte del reposo, acelera uniformemente, con aceleración g, hasta una distancia $L/2$; allí voltea sus motores 180° y sigue su trayectoria con desaceleración uniforme hasta llegar a la estrella con velocidad cero.

Haga un diagrama de espacio-tiempo con la línea de universo de la nave espacial.

Calcule los tiempos de vuelo (medidos en la Tierra y en la nave) para efectuar un viaje a

1) el sistema estelar más cercano, Alfa Centauri, a 4 años luz;

2) el centro de nuestra galaxia, a 30 000 años luz;

3) la galaxia Andrómeda, a 2 000 000 de años luz.

(Si la nave parte de $x = 0$, no olvide restar c^2/a de la fórmula para x. Sugerencia: para aligerar los cálculos utilice un sistema de unidades en el que el tiempo se mide en años y la distancia en años luz; note que la unidad de velocidad es c y la unidad de aceleración —1 año luz/(año)^2— resulta aproximadamente g —lo cual es una casualidad, por supuesto—. Así, puede poner $a = 1$ y $c = 1$ en las fórmulas (II.14) si mide el tiempo en años y la distancia en años luz. Calcule la velocidad máxima alcanzada a la mitad del viaje, en cada caso.)

III. VECTORES Y TENSORES

Hemos llegado a un punto en el cual es necesario poseer algunas herramientas matemáticas para poder proseguir. En este capítulo presentaremos en forma rigurosa el concepto de tensor en el espacio de Minkowski, lo cual nos permitirá simplificar considerablemente los cálculos que efectuaremos en los siguientes capítulos.

Al principio, los tensores, con su abundancia de índices "arriba" y "abajo" pueden desconcertar al lector, pero un poco de gimnasia matemática, "subiendo y bajando" índices, lo prepararán para utilizar estas poderosas herramientas en forma casi automática.

Como vimos en el capítulo I (sección I.5), una transformación de Lorentz es, en cierta forma, una generalización a cuatro dimensiones de una rotación en tres dimensiones. En este capítulo estudiaremos las propiedades generales de las transformaciones de Lorentz, con el fin de dar la definición adecuada de un "tensor".

III.1 Rotaciones en tres dimensiones

Es conveniente regresar a la analogía de una rotación en tres dimensiones. Matemáticamente, dicha rotación es una transformación lineal de las coordenadas que no altera la distancia del origen de coordenadas a un punto (x, y, z):

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Si definimos la matriz columna:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{III.1}$$

la distancia l^2 se puede escribir en la forma

$$l^2 = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = x^2 + y^2 + z^2, \tag{III.2}$$

donde

$$\mathbf{x}^T = (x, y, z) \tag{III.3}$$

es la matriz transpuesta de $\mathbf{x}$.

Ahora, una rotación arbitraria alrededor del origen transforma $\mathbf{x}$ en

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \tag{III.4}$$

de acuerdo con la fórmula

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x}, \tag{III.5}$$

donde $\mathbf{R}$ es una matriz de 3×3, llamada *matriz de rotación*.

Para que se conserve la distancia del origen al punto P necesitamos que

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \mathbf{x}'^T\mathbf{x}' = \mathbf{x}^T\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{x}, \tag{III.6}$$

y como esta ecuación debe cumplirse para cualquier vector $\mathbf{x}$, entonces, forzosamente,

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R} = 1. \tag{III.7}$$

Esta es la condición que debe satisfacer la matriz de rotación.

La matriz $\mathbf{R}$ tiene $3 \times 3 = 9$ componentes, pero éstas no son independientes entre sí porque deben satisfacer la ecuación (III.7). Nótese que dicha ecuación es una relación matricial, así que equivale a $3 \times 3 = 9$ ecuaciones, de las cuales sólo 6 son independientes porque la ecuación matricial (III.7) es simétrica (su transpuesta es la misma, como puede comprobarse fácilmente). En general, una matriz simétrica de $n \times n$ posee $n(n+1)/2$ componentes algebraicamente independientes. En resumen, $\mathbf{R}$ posee 9 componentes que satisfacen 6 condiciones, por lo que $\mathbf{R}$ está definida por 3 parámetros independientes. Estos 3 parámetros definen una rotación arbitraria; pueden ser, por ejemplo, los tres ángulos de Euler, o los ángulos de rotación en cada uno de los planos xy, yz y zx.

III.2 Transformaciones generales de Lorentz

Podemos ahora generalizar el análisis del párrafo anterior a un espacio de Minkowski. Para ello, definamos un vector columna $\mathbf{x}$ y su transpuesta $\mathbf{x}^T$:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}^T = (ct, x, y, z). \tag{III.8}$$

La seudolongitud (al cuadrado) de este vector es

$$s^2 = \mathbf{x}^T \eta \mathbf{x} = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2, \tag{III.9}$$

donde hemos definido la matriz

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{III.10}$$

para tomar en cuenta que el término $(ct)^2$ en la seudolongitud aparece con un signo negativo.

Ahora bien, una transformación de Lorentz es una transformación lineal de coordenadas de la forma

$$\mathbf{x} \to \mathbf{x}' = \Lambda \mathbf{x}, \tag{III.11}$$

donde Λ es una matriz de 4×4. Para que la seudolongitud no se altere, necesitamos que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'^T \eta \mathbf{x}' &= \mathbf{x}^T \Lambda^T \eta \Lambda \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{x}, \end{aligned} \tag{III.12}$$

y esta condición se cumple en general sólo si

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \tag{III.13}$$

Esta es la generalización de la condición (III.7).

La matriz Λ posee $4 \times 4 = 16$ componentes, pero éstas cumplen las 10 condiciones dadas por la relación (III.13), la cual es una matriz *simétrica* que implica 10 ecuaciones distintas. En consecuencia, Λ está determinada por 6 parámetros independientes (a diferencia de los 3 en un espacio tridimensional). Estos 6 parámetros pueden ser

3 componentes del vector de velocidad V, a lo largo del cual se mueve el sistema S' y

3 parámetros de rotación espacial.

Nótese que una rotación espacial de las coordenadas (x, y, z) es también una transformación de Lorentz en el sentido estricto, porque satisface la condición (III.13).

EJERCICIO III.1. Encuentre explícitamente las formas de la matriz Λ para una transformación de Lorentz a lo largo del eje x (ecuación I.3) y a lo largo del eje y. Demuestre que esas dos transformaciones *no* conmutan.

III.3 El grupo de Lorentz

Los resultados de la sección anterior se pueden escribir en una forma que resultará más apropiada para el análisis que sigue. Por lo pronto, de aquí en adelante será conveniente definir las cuatro coordenadas del espacio de Minkowski de la siguiente manera:

$$x^0 = ct, \qquad x^1 = x, \qquad x^2 = y, \qquad x^3 = z$$

(hemos puesto el índice arriba por razones que se aclararán más adelante). Así, la seudodistancia entre un suceso cualquiera y el origen está dada por

$$s^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2. \tag{III.14}$$

Hemos visto que una transformación de Lorentz deja invariante el valor de la seudodistancia. Sin embargo, la transformación definida por las ecuaciones I.10 (p. 27) es válida únicamente para un sistema S' que se mueve a lo largo del eje x. Buscaremos ahora cómo debe ser la transformación más general.

Vamos a definir una matriz de 4×4:

$$\begin{array}{lc} \text{columna:} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \eta_{\alpha\beta} = & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{renglón:} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \tag{III.15}$$

donde α, β son índices que van de 0 a 3 y se refieren a las columnas y renglones de la matriz η (usaremos siempre la convención de que los índices griegos toman los valores 0, 1, 2, 3). Entonces, la ecuación (III.14) se puede escribir como

$$s^2 = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \tag{III.16}$$

que es simplemente la ecuación (III.9) escrita en forma más explícita.

¿Cuál es la transformación $x^\alpha \rightarrow x'^\alpha$ que deja invariante la forma (III.16)? Es una transformación lineal

$$x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = \sum_{\beta=0}^{3} \Lambda^\alpha_\beta x^\beta, \tag{III.17}$$

donde Λ^{α}_{β} es una matriz de 4×4. Esta ecuación es la misma que (III.11), excepto por el hecho de que se han escrito explícitamente los índices de la matriz Λ que designan sus renglones y columnas. La condición que debe satisfacer esta matriz se deduce del hecho de que la seudodistancia s^2 es invariante:

$$s'^2 = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} \eta_{\alpha\beta} x'^{\alpha} x'^{\beta} = s^2 = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} \eta_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta}.$$

Usando la ecuación (III.17), tenemos de esta última relación:

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{3} \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} x^{\mu} x^{\nu} = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} \eta_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta}. \tag{III.18}$$

Nótese ahora que los índices α, β, μ, ν sólo son etiquetas que sirven para contar: cada uno de estos índices toma los valores 0, 1, 2, 3. Pero podemos cambiar de etiquetas, poniendo por ejemplo σ en lugar de α y la ecuación no se altera, pues se entiende que σ también va de 0 a 3. En particular, en el miembro derecho de la ecuación (III.18) podemos cambiar

$$\alpha \to \mu \qquad \beta \to \nu,$$

de lo cual resulta

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{3} \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} x^{\mu} x^{\nu} = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}. \tag{III.19}$$

Como esta ecuación debe satisfacerse para cualquier x^{μ} que escojamos, resulta necesariamente que

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{3} \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} = \eta_{\mu\nu}. \tag{III.20}$$

Esta ecuación es sólo otra manera de escribir la condición (III.13).

El análisis que sigue a la ecuación (III.13) se aplica en forma idéntica. Aparentemente, la ecuación (III.20) es un conjunto de $4 \times 4 = 16$ ecuaciones, pero es simétrica frente a cambios $\mu \leftrightarrow \nu$, así que es en realidad un conjunto de **10** ecuaciones para las 16 componentes de Λ^{α}_{β}. Esto implica que toda transformación de Lorentz está definida por $16 - 10 = \mathbf{6}$ parámetros: **3** de rotación espacial y **3** de transformación pura de Lorentz a lo largo del vector de 3 componentes **V**, como vimos anteriormente.

Una propiedad importante de las transformaciones de Lorentz es que forman un grupo: el *grupo de Lorentz.*

EJERCICIO III.2. Recuerde que un grupo G es un conjunto de elementos $x, y, \ldots$ y una operación que a cada par de esos elementos le asocia un tercer elemento en el grupo. Además, la operación (que se representa con un punto $\cdot$) cumple las condiciones:

i) Existe el elemento unidad $e \in G$, tal que $a \cdot e = e \cdot a = a$ para toda $a \in G$.

ii) A toda $a \in G$ le corresponde su inverso $a^{-1} \in G$ tal que

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e.$$

iii) La operación es asociativa:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

Demuestre que las transformaciones de Lorentz forman un grupo, debido a que están definidas por una matriz Λ de 4×4 que cumple la condición (III.13). ¿Son dos transformaciones de Lorentz consecutivas

$$x \to x' = \Lambda_1 x \qquad \text{y} \qquad x' \to x'' = \Lambda_2 x'$$

equivalentes a una sola $\Lambda = \Lambda_1 \Lambda_2$? (el producto matricial de Λ_1 con Λ_2). ¿Conmutan las transformaciones de Lorentz?

EJERCICIO III.3. Demuestre, directamente de la ecuación (III.20), que $(\Lambda_0^0)^2 > 1$. ¿A qué clase de transformaciones corresponden los dos casos $\Lambda_0^0 > 1$ y $\Lambda_0^0 < 1$? ¿A una inversión del tiempo?

EJERCICIO III.4. Tome el determinante de la ecuación (III.13) y demuestre que el determinante de Λ (det Λ) sólo tiene los valores ± 1.

EJERCICIO III.5. ¿A qué clase de transformación corresponden los 4 casos que se obtienen según si $\det \Lambda = \pm 1$, $\Lambda_0^0 > 1$ y $\Lambda_0^0 < 1$? ¿A inversiones del espacio y del tiempo?

III.4 Tensores

Nótese que la transformación (III.17) tiene un inverso

$$x^\alpha = \sum_{\beta=0}^{3} (\Lambda^{-1})^\alpha_\beta x'^\beta, \tag{III.21}$$

donde Λ^{-1} es el inverso de la matriz Λ (Λ^{-1} existe porque, como vimos en el ejercicio III.4, $\det \Lambda = \pm 1 \neq 0$). Más explícitamente, Λ^{-1} está definida por

$$\sum_{\beta=0}^{3} (\Lambda^{-1})^\alpha_\beta \Lambda^\beta_\gamma = \delta^\alpha_\gamma, \tag{III.22}$$

donde δ^α_β es la delta de Kronecker definida como

$$\delta^\alpha_\beta = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases}.$$

Las dos últimas ecuaciones también se pueden poner en forma matricial:

$$x = \Lambda^{-1} x' \qquad \text{donde} \qquad \Lambda^{-1}\Lambda = 1,$$

y la matriz unidad **1** corresponde simplemente a la δ^α_β de Kronecker.

Ya vimos cómo se transforma x^α frente a una transformación de Lorentz. Veamos ahora cómo se transforma el operador $\partial/\partial x^\alpha$. De acuerdo con la regla de la cadena,

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \to \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \sum_{\beta=0}^{3} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta}, \tag{III.23}$$

y usando la ecuación (III.21), resulta

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \to \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \sum_{\beta=0}^{3} (\Lambda^{-1})^\beta_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta}.$$

Se define un *vector covariante* como un conjunto de 4 funciones V_α ($\alpha = 0, 1, 2, 3$) que, frente a una transformación de Lorentz, se transforma como $\partial/\partial x^\alpha$, es decir,

$$V_\alpha \to V'_\alpha = \sum_{\beta=0}^{3} (\Lambda^{-1})^\beta_\alpha V_\beta,$$

y un *vector contravariante* como un conjunto de 4 funciones $V^\alpha (\alpha = 0, 1, 2, 3)$ que se transforma como las coordenadas x^α, o sea,

$$V^\alpha \to V'^\alpha = \sum_{\beta=0}^{3} \Lambda^\alpha_\beta V^\beta.$$

En general, se define un *tensor p* veces covariante y *q* veces contravariante como un conjunto de $4p \times 4q$ componentes que, frente a una transformación de Lorentz, se transforman según la regla

$$T^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_q}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} \to T'^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_q}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} = \sum_{\{\mu,\nu\}=0}^{3} \Lambda^{\beta_1}_{\mu_1}\Lambda^{\beta_2}_{\mu_2}\cdots\Lambda^{\beta_q}_{\mu_p}(\Lambda^{-1})^{\nu_1}_{\alpha_1}(\Lambda^{-1})^{\nu_2}_{\alpha_2} \cdots (\Lambda^{-1})^{\nu_q}_{\alpha_p} T^{\mu_1\ldots\mu_q}_{\nu_1\ldots\nu_p} \tag{III.24}$$

La regla general, que debe recordarse, es que todas las componentes covariantes se transforman con matrices Λ^{-1}, y todas las componentes contravariantes con matrices Λ. El número de matrices en la transformación corresponde al número de índices y el *rango* del tensor se define como $p + q$.

También se define un *escalar* como una función invariante frente a transformaciones de Lorentz:

$$f \to f' = f.$$

Por ejemplo, la seudodistancia es un escalar.

Tensores especiales. A continuación definiremos los tensores $\eta_{\alpha\beta}$, $\eta^{\alpha\beta}$, δ^α_β y $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$, que desempeñan papeles muy importantes en los cálculos tensoriales.

El tensor $\eta_{\alpha\beta}$ es dos veces covariante porque, debido a la invariancia de la seudodistancia,

$$\mathbf{x}^T \eta\, \mathbf{x} = \mathbf{x}'^T \eta' \mathbf{x}' = \mathbf{x}^T \Lambda^T \eta' \Lambda \mathbf{x}, \tag{III.25}$$

y, por lo tanto, $\eta = \Lambda^T \eta' \Lambda$, lo cual equivale a

$$\eta' = (\Lambda^{-1})^T \eta \Lambda^{-1}.$$

Ésta es justamente la condición para que η sea un tensor covariante de rango dos. Es importante notar que, debido a la fórmula (III.13), η' y η son iguales componente a componente, por lo que η tiene la misma forma (III.15) en

cualquier sistema de referencia. A $\eta_{\alpha\beta}$ se le llama el *tensor métrico de Minkowski* (métrico porque permite medir seudodistancias).

El tensor δ^{α}_{β} es una vez covariante y una vez contravariante, pues

$$\delta^{\alpha}_{\beta} = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \Lambda^{\alpha}_{\mu}(\Lambda^{-1})^{\nu}_{\beta}\delta^{\mu}_{\nu}.$$

EJERCICIO III.6. Definamos $\eta^{\alpha\beta}$ a través de la ecuación

$$\sum_{\beta=0}^{3} \eta^{\alpha\beta}\eta_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}$$

o, explícitamente,

$$\eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demuestre que $\eta^{\alpha\beta}$ es un tensor dos veces contravariante.

Los tensores $\eta_{\alpha\beta}$ y $\eta^{\alpha\beta}$ son sumamente útiles para subir y bajar índices; por ejemplo, si tenemos un vector covariante V_{β}, sus componentes contravariantes están dadas por

$$V^{\alpha} = \sum_{\beta=0}^{3} \eta^{\alpha\beta}V_{\beta}.$$

EJERCICIO III.7. Use las reglas de transformación de $\eta^{\alpha\beta}$ y V_{β} para demostrar que V^{α}, definido en la última ecuación, efectivamente se transforma como un vector contravariante.

Del mismo modo, dadas las componentes contravariantes V^{α}, podemos regresar a las covariantes con la fórmula

$$V_{\beta} = \sum_{\alpha=0}^{3} \eta_{\alpha\beta}V^{\alpha}.$$

En general, para cualquier tensor se tiene, por ejemplo,

$$\sum_{\beta=0}^{3} \eta_{\alpha\beta}V^{\beta\gamma} = V^{\gamma}_{\alpha}, \qquad U^{\gamma}_{\alpha} = \sum_{\beta=0}^{3} \eta_{\alpha\beta}U^{\beta\gamma}, \qquad \text{etc.}$$

Por último, vamos a definir $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ como el símbolo totalmente antisimétrico que tiene la propiedad

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha\beta\gamma\delta \text{ es una permutación } \textit{par} \text{ de 0123} \\ -1, & \text{si } \alpha\beta\gamma\delta \text{ es una permutación } \textit{impar} \text{ de 0123} \\ 0, & \text{si algún índice se repite} \end{cases}$$

y $\epsilon^{0123} = -1$.

Si definimos una matriz M^{α}_{β} de 4×4, en que α y β representan renglones y columnas, entonces un resultado básico del álgebra lineal es que el determinante de M^{α}_{β} está dado por la fórmula

$$\det(M^{\alpha}_{\beta}) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=0}^{3} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} M^{0}_{\alpha} M^{1}_{\beta} M^{2}_{\gamma} M^{3}_{\delta},$$

o, lo que es equivalente,

$$\det(M^{\alpha}_{\beta})\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=0}^{3} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} M^{\lambda}_{\alpha} M^{\mu}_{\beta} M^{\nu}_{\gamma} M^{\rho}_{\delta}.$$

Regresemos al concepto de tensor. ¿Es $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ un tensor? Si lo fuera, se transformaría como

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \rightarrow \epsilon'^{\alpha\beta\gamma\delta} = \sum_{\lambda,\mu,\nu,\rho=0}^{3} \Lambda^{\alpha}_{\lambda} \Lambda^{\beta}_{\mu} \Lambda^{\gamma}_{\nu} \Lambda^{\delta}_{\rho} \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho},$$

pero

$$\det(\Lambda)\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \sum_{\lambda,\mu,\nu,\rho=0}^{3} \Lambda^{\alpha}_{\lambda} \Lambda^{\beta}_{\mu} \Lambda^{\gamma}_{\nu} \Lambda^{\delta}_{\rho} \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho},$$

y ya vimos que $\det(\Lambda) = \pm 1$. Así que $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ se transforma como un tensor de rango 4, excepto por un cambio de signo si $\det \Lambda = -1$.

Por definición $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ es un *seudotensor:* cambia de signo frente a inversiones de tiempo o de espacio, pero aparte de ese signo se transforma como un tensor de rango 4.

Mr χ

III.5 Convención de Einstein

El lector habrá notado que, en todas las fórmulas que hemos visto hasta ahora en las que hay que sumar sobre índices, siempre aparece el índice repetido una vez arriba y una vez abajo. Este hecho sugiere utilizar la llamada *convención de Einstein,* que consiste en lo siguiente: en toda expresión como

$$\sum_{\alpha=0}^{3} V_\alpha U^\alpha,$$

donde hay una suma sobre un índice covariante y uno contravariante, se *omite* el signo de suma $\sum$. Por ejemplo,

$$V_\alpha U^\alpha \qquad \text{significa} \qquad \sum_{\alpha=0}^{3} V_\alpha U^\alpha.$$

Otro ejemplo: por definición, la *traza* de un tensor de rango 2 es

$$T = \eta_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = T^\alpha_\alpha.$$

Los índices que se repiten y sirven para sumar se llaman *índices mudos;* sólo pueden aparecer en un lado de una ecuación y se pueden cambiar por cualquier letra griega sin que se altere la fórmula. En cambio, los índices que no se suman se llaman *índices libres:* siempre aparecen en ambos lados de una ecuación y sólo se pueden cambiar simultáneamente.

Por ejemplo, en la fórmula

$$V^\alpha = T^{\alpha\beta} U_\beta,$$

α es un índice libre y β es un índice mudo. Esta misma ecuación puede escribirse como

$$V^\alpha = T^{\alpha\gamma} U_\gamma.$$

sin que se altere su forma explícita.

La convención de Einstein es muy cómoda para subir y bajar índices. Consideremos un cuadrivector V^α: sus componentes contravariantes son V^0, V^1, V^2, V^3, que escribimos como

$$V^\alpha = (V^0, \mathbf{V}).$$

Las componentes covariantes son $V_\alpha = \eta_{\alpha\beta} V^\beta$, o sea,

$$V_0 = -V^0, \qquad V_1 = V^1, \qquad V_2 = V^2, \qquad V_3 = V^3,$$

y podemos escribir

$$V_\alpha = (V_0, \mathbf{V}) = (-V^0, \mathbf{V}).$$

Por ejemplo, la magnitud al cuadrado de un cuadrivector V^α es

$$V^2 = V^\alpha V_\alpha = \eta_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta = -(V^0)^2 + |\mathbf{V}|^2,$$

lo cual es un escalar.

NOTA ACLARATORIA

En este libro utilizamos la definición

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -c^2\, dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

para la seudodistancia, lo cual equivale a poner $\eta_{00} = -1$ y $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$ en el tensor de Minkowski. Se dice que la *signatura* es $(- + ++)$.

Otra convención, utilizada en otros libros, consiste en definir la seudodistancia como

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

lo cual equivale a poner $\eta_{00} = 1$ y $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$, y la signatura es $(+ - - -)$.

En el primer caso, la norma de un cuadrivector temporal es negativa, mientras que en el segundo caso es positiva. Al leer un texto matemático sobre relatividad, es recomendable comprobar antes que nada qué signatura se está utilizando.

III.6 ALGUNAS DEFINICIONES ÚTILES

Un tensor de rango 2 es simétrico si $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$. En el espacio de Minkowski, un tensor simétrico posee 10 componentes independientes.

Un tensor de rango 2 es antisimétrico si $T_{\alpha\beta} = -T_{\beta\alpha}$. Un tensor antisimétrico posee 6 componentes independientes.

Nótese que todo tensor $T_{\alpha\beta}$ de rango 2 se puede expresar como la suma de un tensor simétrico $T_{(\alpha\beta)} \equiv \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha})$ y un tensor antisimétrico $T_{[\alpha\beta]} \equiv \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha})$; es decir, $T_{\alpha\beta} = T_{(\alpha\beta)} + T_{[\alpha\beta]}$.

El *gradiente cuadridimensional* de un escalar F es, por definición,

$$\frac{\partial F}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla} F\right).$$

Veamos, para terminar, el concepto de volumen en el espacio de Minkowski.

gradiente en tres dimensiones espaciales $\nabla F = e_i \frac{\partial F}{\partial x^i}$

Recordemos que, en dos dimensiones, la superficie definida por dos vectores **A** y **B** es el determinante

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}.$$

En tres dimensiones, tres vectores **A**, **B** y **C** definen un volumen dado por

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}.$$

Generalizando a cuatro dimensiones, tenemos que cuatro vectores cuadridimensionales **A**, **B**, **C** y **D** definen un cuadrivolumen dado por

$$V = \begin{vmatrix} A^1 & A^2 & A^3 & A^4 \\ B^1 & B^2 & B^3 & B^4 \\ C^1 & C^2 & C^3 & C^4 \\ D^1 & D^2 & D^3 & D^4 \end{vmatrix}.$$

Pero, como vimos más arriba, el determinante se puede poner en la forma

$$V = \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} A^\lambda B^\mu C^\nu D^\rho, \tag{III.26}$$

como es fácil comprobar; recuerde que $\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}$ es el seudotensor antisimétrico definido anteriormente. De la ecuación (III.26) deducimos inmediatamente que el cuadrivolumen es seudoescalar. En particular, la diferencial de volumen, dV, en el espacio de Minkowski es el cuadrivolumen formado por los 4 cuadrivectores diferenciales $(dx^0, 0, 0, 0)$, $(0, dx^1, 0, 0)$, $(0, 0, dx^2, 0)$ y $(0, 0, 0, dx^3)$. Por lo tanto, según la ecuación (III.26) tenemos que

$$dV = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3, \tag{III.27}$$

que es un seudoescalar.

III.7 Cuadrivector unitario de velocidad

Un concepto básico y muy útil en mecánica relativista es la del *cuadrivector de velocidad*. Una partícula que se mueve de algún modo describe en el espacio de Minkowski una línea de universo. Esta línea, como toda curva, puede describirse por medio de ecuaciones paramétricas:

$$x^\alpha = x^\alpha(\tau),$$

donde τ es un parámetro que varía de manera continua.

Es conveniente escoger como parámetro τ al tiempo propio a lo largo de la línea de universo. Recordemos que

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-ds^2} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2\,dt^2 - |d\mathbf{x}|^2} = \sqrt{1 - \frac{|\mathbf{V}|^2}{c^2}}\,dt = \gamma^{-1}\,dt, \qquad \text{(III.28)}$$

como se vio ya en la sección II.1 (pp. 31 y ss.). Nótese que, por la manera como está definido, el *tiempo propio τ es un escalar.*

Definamos ahora

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{c\,d\tau}; \qquad \text{(III.29)}$$

u^α es el vector tangente a la línea de universo y es un cuadrivector: en efecto, dx^α es un cuadrivector y $d\tau$ es un escalar; por lo tanto, frente a una transformación de Lorentz, u^α se transforma como un cuadrivector contravariante.

La magnitud de u^α es

$$\eta_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = \frac{1}{c^2}\eta_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{ds^2}{c^2\,dt^2} = -1; \qquad \text{(III.30)}$$

así que u^α es un cuadrivector unitario.

Veamos cuál es la relación entre las componentes de u^α y la velocidad $\mathbf{v}$. Tenemos

$$\begin{aligned} u^0 &= \frac{dx^0}{c\,d\tau} = \frac{dt}{c\,d\tau} = \gamma \\ u^1 &= \frac{dx}{c\,d\tau} = \gamma\frac{dx}{c\,dt} = \gamma\frac{v_x}{c}, \qquad \text{etc.,} \end{aligned} \qquad \text{(III.31)}$$

de donde

$$u^\alpha = \left(\gamma, \gamma\frac{\mathbf{v}}{c}\right),$$

o, en componentes covariantes,

$$u_\alpha = \left(-\gamma, \gamma\frac{\mathbf{v}}{c}\right).$$

Se puede comprobar directamente de las ecuaciones (III.31) que $u^\alpha u_\alpha = -1$.

También podemos definir el *cuadrivector de aceleración:*

$$a^\alpha = c\frac{du^\alpha}{d\tau}.$$

EJERCICIO III.8. Demuestre que $a^\alpha u_\alpha = 0$ (sugerencia: utilice la condición de que $u^\alpha u_\alpha = -1$).

EJERCICIO III.9. Demuestre que la aceleración relativista tiene la forma explícita

$$a^\alpha = \left(\frac{1}{c}\gamma^3 \mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}, \gamma\dot{\mathbf{v}} + \gamma^3\frac{\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}}{c^2}\mathbf{v}\right), \tag{III.32}$$

donde el punto representa la derivada con respecto a τ.

Un caso particularmente interesante de movimiento es el de aceleración uniforme. La definición invariante de tal movimiento es

$$a^\mu a_\mu = a^2, \tag{III.33}$$

donde el escalar a es la magnitud constante de la aceleración. Esta definición es independiente del sistema de referencia utilizado.

EJERCICIO III.10. Demuestre que el movimiento descrito en el ejercicio II.12 (p. 47) satisface efectivamente la ecuación (III.33).

En general, las propiedades de transformación de los escalares, vectores y tensores son muy útiles para calcular cantidades físicas en un sistema u otro. El siguiente ejercicio es un ejemplo de lo anterior.

EJERCICIO III.11. Consideremos dos partículas que poseen velocidades $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ en cierto sistema S. ¿Cuál es la velocidad relativa entre las dos partículas? (es decir, ¿cuál es la velocidad de una partícula vista desde el sistema en reposo de la otra?)

En el sistema S, las cuadrivelocidades de las dos partículas son

$$u^\alpha_{(1)} = \gamma_1(1, \mathbf{v}_1/c) \qquad u^\alpha_{(2)} = \gamma_2(1, \mathbf{v}_2/c)$$

$\left(\gamma_i = \sqrt{1 - v_i^2/c^2}\right)$, de donde resulta que

$$u^\alpha_{(1)} u_{(2)\alpha} = -\gamma_1\gamma_2\left(1 - \frac{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2}{c^2}\right). \tag{III.34}$$

Por otra parte, en el sistema de referencia de la partícula 1:

$$u'^\alpha_{(1)} = (1, \mathbf{0}) \qquad u'^\alpha_{(2)} = \gamma(1, \mathbf{v}/c),$$

donde v es la velocidad relativa entre las dos partículas y $\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Ahora bien, el producto $u^{\alpha}_{(1)} u_{(2)\alpha}$ es un escalar y tiene, por lo tanto, el mismo valor en cualquier sistema de referencia, así que

$$u'^{\alpha}_{(1)} u'_{(2)\alpha} = -\gamma = u^{\alpha}_{(1)} u_{(2)\alpha}. \tag{III.35}$$

Comparando con la ecuación (III.34) resulta

$$\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \left(1 - \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{c^2}\right),$$

que da la relación entre la magnitud v de la velocidad relativa y las otras velocidades. Es fácil comprobar que en el límite no relativista se obtiene la fórmula

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2,$$

como era de esperarse.

IV. DINÁMICA RELATIVISTA

IV.1 Repaso de mecánica clásica

En mecánica clásica, la posición y velocidad de una partícula se pueden determinar en todo momento si se conoce la fuerza que actúa sobre ella. A su vez, la fuerza puede derivarse, en muchos casos, a partir de un potencial V. Así, la segunda ley de Newton toma la forma

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V, \tag{IV.1}$$

en notación bien conocida.

Una forma equivalente, y muy útil en la práctica, de expresar la segunda ley de Newton es a través del formalismo de Lagrange.[1] Se define el lagrangiano L como la diferencia entre la energía cinética T y la potencial V:

$$L = T - V, \tag{IV.2}$$

con la particularidad de que T y V dependen de *cualquier* tipo de coordenadas q_i (las coordenadas cartesianas x, y, z son sólo un caso particular), así como de las derivadas temporales $\dot{q}_i$ de estas coordenadas y del tiempo t, es decir, $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$. Se puede demostrar que la ecuación de Newton toma la forma más general[2]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{IV.3}$$

conocida como ecuación de Euler–Lagrange. Nótese que, para un sistema de N partículas, se tiene en general $3N$ coordenadas (3 para cada partícula).

Otra formulación muy útil de la mecánica clásica es el formalismo de Hamilton.[3] Se define el *momento generalizado*

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \tag{IV.4}$$

y el *hamiltoniano*

[1] Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Físico y matemático francés de origen italiano. Desarrolló la mecánica analítica.

[2] Véase, por ejemplo, Landau y Lifschitz (1973); Goldstein (2001).

[3] William Rowan Hamilton (1805-1865). Físico y matemático irlandés, conocido por sus numerosas contribuciones científicas.

$$H(p_i, q_i) = \sum_i p_i q_i - L, \tag{IV.5}$$

El hamiltoniano es una función de p_i y q_i que satisface las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad \text{y} \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{IV.6}$$

que generalizan las ecuaciones

$$\dot{\mathbf{p}} = -\boldsymbol{\nabla} V \qquad \text{y} \qquad m\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{p}.$$

Por último, se define la acción como

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt, \tag{IV.7}$$

donde la integral se toma sobre las posibles trayectorias $q_i = q_i(t)$ que podría describir la partícula. En general, el valor de A depende de la trayectoria escogida, pero, según el principio fundamental de la mecánica, la trayectoria real de una (o varias) partículas es aquella que minimiza (o maximiza) el valor de la acción A. De acuerdo con el cálculo de variaciones, esta trayectoria es precisamente aquella que satisface las ecuaciones de Lagrange (IV.3).

Leyes de conservación. El formalismo lagrangiano es particularmente apropiado para obtener leyes de conservación físicas. En general, cada vez que el lagrangiano de un sistema es invariante frente a cierta transformación, se tiene una cantidad conservada (teorema de Noether[4]). Así, la invariancia frente a traslaciones en el tiempo implica que la energía se conserva. Del mismo modo, la invariancia frente a traslaciones en el espacio implica la conservación del momento. Ilustraremos a continuación estos dos ejemplos para el caso de N partículas.

Sea el lagrangiano L independiente del tiempo, es decir $L = L(q_i, \dot{q}_i)$. Entonces

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right).$$

Usando la ecuación de Euler–Lagrange (IV.3) se tiene

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right] = \sum_{i=1}^{3N} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right).$$

[4] Emmy Noether (1882-1935). Matemática alemana que realizó importantes contribuciones en los campos de las matemáticas y la física teórica.

De aquí resulta que $$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{3N} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right] = 0.$$

La cantidad entre paréntesis cuadrados es justamente el hamiltoniano H. El resultado final es que, si el lagrangiano no depende del tiempo, entonces H es una cantidad conservada; en este caso, H es precisamente la *energía* (conservada) del sistema.

Veamos ahora el caso en que el lagrangiano no depende de la posición espacial, es decir, L no cambia si se hace la transformación $\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}_i + \delta\mathbf{a}$, donde el índice i corresponde a la partícula número i y $\mathbf{a}$ es el desplazamiento espacial (el mismo para todas las partículas). Esto implica que

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta\mathbf{a} = 0,$$

siendo N el número total de partículas.

Como esta ecuación tiene que cumplirse para cualquier desplazamiento $\delta\mathbf{a}$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = 0.$$

Pero, en este caso, la ecuación de Euler–Lagrange implica

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}\right) = 0.$$

La cantidad entre paréntesis es la suma de los momentos de todas las partículas,

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}_i,$$

la cual es una cantidad conservada si, como acabamos de ver, el lagrangiano no depende de la posición particular en el espacio.

En general, el teorema de Noether nos dice que, cuando el lagrangiano es invariante ante alguna transformación de coordenadas, hay una cantidad conservada. Ya vimos dos ejemplos. Otros ejemplos son, a saber: invariancia frente a rotaciones que implica conservación del momento angular; invariancia frente a rotaciones alrededor de cierto eje que implica conservación del momento en esa dirección, etcétera.

IV.2 Masa, energía y momento en mecánica relativista

Analicemos el caso de una partícula *libre*, es decir, una partícula que se mueve sin la influencia de fuerzas externas. Este caso es casi trivial en mecánica clásica: el lagrangiano de la partícula libre (de masa m y velocidad v) es

$$L = \tfrac{1}{2}mv^2, \tag{IV.8}$$

y la acción correspondiente es

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt \tag{IV.9}$$

Sin embargo, la transición al caso relativista ya no es tan trivial. En efecto, la acción debe ser necesariamente un escalar, pues, de lo contrario, podría ser un mínimo para un observador, pero no para otro. La condición de que la acción sea un escalar frente a transformaciones de Lorentz impone restricciones muy fuertes.

Para una partícula que se mueve libremente, el único escalar que se puede construir con sus variables es el tiempo propio τ. Esto implica que la acción debe tener la forma

$$A = \alpha \int_{t_1}^{t_2} d\tau, \tag{IV.10}$$

donde α es cierta constante. Esta forma de la acción garantiza que tenga el mismo valor en cualquier sistema de coordenadas.

Ahora bien, ¿cuál es la relación entre esta acción relativista y la acción clásica? Para elucidar esto, recordemos que

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,dt, \tag{IV.11}$$

donde t es el tiempo medido en el laboratorio. Comparando con la ecuación (IV.9), resulta que el lagrangiano es

$$L = \alpha\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \tag{IV.12}$$

lo cual se reduce, en el límite no relativista, a

$$L \approx \alpha\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) \tag{IV.13}$$

y términos adicionales de orden $\alpha v^4/c^4$ que se pueden despreciar. Si ahora ponemos $\alpha = -mc^2$, obtenemos

$$L \approx -mc^2 + \tfrac{1}{2}mv^2, \tag{IV.14}$$

que es justamente el lagrangiano clásico, excepto por el término constante $-mc^2$. Pero esta constante es irrelevante, pues no entra en la ecuación de Euler-Lagrange (IV.3), justamente por ser constante.

En resumen, podemos afirmar que el lagrangiano relativista de una partícula libre es

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \tag{IV.15}$$

que se reduce al caso clásico (IV.8), excepto por una constante irrelevante. Este lagrangiano es el único que garantiza que la acción sea invariante frente a transformaciones de Lorentz.

A partir del lagrangiano (IV.15), es fácil calcular el momento generalizado de la partícula. Resulta ser

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{mv_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{IV.16}$$

que es el momento relativista

$$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}, \tag{IV.17}$$

el cual difiere del momento clásico por el factor γ. En particular, dado que $\gamma d\tau = dt$, también se puede escribir el momento relativista en la forma

$$\mathbf{p} = m\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}, \tag{IV.17'}$$

donde $\mathbf{r}$ es la posición espacial de la partícula y τ su tiempo propio.

Del mismo modo, se puede demostrar con un poco de álgebra que el hamiltoniano tiene la forma

$$H = \mathbf{p}\cdot\mathbf{v} - L = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}, \tag{IV.18}$$

y ésta es precisamente la energía de la partícula libre relativista. Esta energía puede también escribirse en función de la velocidad utilizando la fórmula (IV.16), con el resultado

$$E = mc^2\gamma, \tag{IV.19}$$

que es una cantidad conservada. Asimismo, dado que $\gamma = dt/d\tau$, la energía se puede escribir en la forma

$$E = mc^2 \frac{dt}{d\tau}. \qquad \text{(IV.19')}$$

La ecuación (IV.19) implica que, incluso si la partícula está en reposo, posee una energía

$$E_0 = mc^2. \qquad \text{(IV.20)}$$

¡Ésta es la famosa fórmula de Einstein que relaciona la masa con la energía!

Hay que recordar, sin embargo, que la energía siempre se mide con respecto a algún valor que se escoge por convención. Estrictamente hablando, la fórmula (IV.20) sólo pone de manifiesto que existe un valor natural, mc^2, para la energía de un cuerpo masivo. Einstein intuyó que existe una equivalencia entre masa y energía, y que, en principio, una puede transformarse en la otra. Este es un hecho experimental que se ha verificado plenamente, y que encaja perfectamente en la teoría de la relatividad, tal como la hemos expuesto hasta aquí.

Vale la pena mencionar que, de acuerdo con la fórmula (IV.19), $m\gamma$ puede interpretarse como la masa de un cuerpo en movimiento, la cual difiere de su masa en reposo por un factor γ. Algunas veces, se dice que la masa de un cuerpo aumenta si se mueve. Esta interpretación es válida, pero es más una cuestión de cómo definir la masa que de un hecho físico. En este libro de texto, llamaremos masa simplemente a la que posee un cuerpo en reposo, es decir, su masa en reposo, y no usaremos el concepto de masa en movimiento. Esta es una convención, pero evita varias confusiones.

La energía en reposo no es un simple concepto matemático. Uno de los hechos fundamentales de la física moderna es que, bajo condiciones adecuadas, la masa puede transformarse en energía y viceversa. La liberación de enormes cantidades de energía por reacciones nucleares es un ejemplo bien conocido.

EJERCICIO IV.1. La masa de un protón es $m_p = 1.672 \times 10^{-24}$ g y la de un neutrón es $m_n = 1.675 \times 10^{-24}$ g. Por otra parte, un núcleo de helio (que consta de 2 protones y 2 neutrones) tiene una masa de 6.642×10^{-24} g, que es menor que $2m_p + 2m_n$. ¿En qué se fue la diferencia de masa? ¿Cuál es la energía liberada al formarse un núcleo de helio a partir de dos protones y dos neutrones (fusión nuclear)?

EJERCICIO IV.2. La única manera de transformar totalmente la masa de una partícula en energía es poniéndola en contacto con su antipartícula: se libera energía en forma de radiación. Si un meteorito de antimateria de 1 gramo llegara a chocar con la Tierra, ¿cuál sería la energía generada?

Volvamos a nuestra definición del momento **p** dada por la ecuación (IV.17). Se trata de un vector en el espacio de tres dimensiones, pero en la teoría de la relatividad es más conveniente trabajar con cuadrivectores. Si definimos el *cuadrivector de momento* —o simplemente *cuadrimomento*— como

$$p^\alpha = mcu^\alpha, \tag{IV.21}$$

siendo u^α el cuadrivector de velocidad, tenemos, según la ecuación (III.31) [p. 62],

$$p^\alpha = (mc\gamma, m\gamma\mathbf{v}). \tag{IV.22}$$

Las componentes espaciales de este cuadrivector son, precisamente, las componentes del momento **p**, según la ecuación (IV.17). Además, resulta que la componente temporal 0 es la masa en movimiento multiplicada por $c\gamma$, o sea, según la fórmula de Einstein, ecuación (IV.19), la energía total divida por c. En resumen,

$$p^\alpha = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right). \tag{IV.23}$$

En la teoría de la relatividad, la energía y el momento forman un cuadrivector. Nótese que la magnitud de p^α es, según la ecuación (IV.21),

$$p_\alpha p^\alpha = -(mc)^2, \tag{IV.24}$$

que es un escalar constante.

EJERCICIO IV.3. Encuentre la ley de transformación de la energía y el momento de un sistema S a uno S' que se mueve a lo largo del eje x de S. (Sugerencia: use el hecho de que p^α es un cuadrivector y que, por lo tanto, se transforma como x^α.)

De la fórmula (IV.19) se ve que la energía necesaria para que una partícula alcance la velocidad de la luz es infinita. Esto implica que, según la teoría de la relatividad, ésta es la velocidad límite en la naturaleza. La única partícula conocida que puede viajar a la velocidad de la luz es el fotón, cuya masa en reposo es nula. La velocidad del fotón (en el vacío) es siempre c.

EJERCICIO IV.4. Defina el cuadrivector de fuerza

$$F^\alpha = \frac{dp^\alpha}{d\tau}.$$

Demuestre que sus componentes son

$$F^\alpha = \left(\mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{F}\right)$$

donde $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/d\tau = md^2\mathbf{r}/d\tau^2$.

Nótese que de la definición de E y $\mathbf{p}$ resulta

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2}\mathbf{v}. \tag{IV.25}$$

Esta fórmula es muy útil, ya que es válida incluso para una partícula sin masa como el fotón. Si $m = 0$, se tiene

$$\mathbf{v} = c\mathbf{n},$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector unitario en la dirección de movimiento del fotón, y de acuerdo con la ecuación (IV.25),

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c}\mathbf{n}. \tag{IV.26}$$

Por otra parte, según la mecánica cuántica, la energía de un fotón de frecuencia ν es

$$E = h\nu,$$

donde h es la constante de Planck. La ecuación (IV.26) implica que un fotón también tiene un momento cuya magnitud p es proporcional a su frecuencia:

$$p = \frac{h\nu}{c}.$$

Así, el cuadrimomento de un fotón es

$$k^\alpha = \frac{h\nu}{c}(1, \mathbf{n}) = \frac{h}{\lambda}(1, \mathbf{n}), \tag{IV.27}$$

donde λ es la longitud de onda (es común designar el cuadrimomento del fotón por k^α).

EJERCICIO IV.5. Siguiendo la idea del ejercicio IV.3, demuestre la fórmula del efecto Doppler (II.13) transformando directamente el cuadrimomento k^α dado por la fórmula (IV.27).

IV.3 Aplicaciones de las leyes de la conservación: Choques de partículas

Es bien sabido que, en mecánica clásica, la interacción entre varias partículas está caracterizada por la conservación de la masa, la energía y el momento del sistema de partículas. El equivalente de esta ley en la teoría de la relatividad es la conservación del cuadrimomento total:

$$\sum p^\alpha = \text{constante}. \tag{IV.28}$$

Tal como en el caso clásico, esta ley de conservación se puede obtener directamente de la invariancia del lagrangiano ante traslaciones en el espacio. Para un sistema de N partículas libres relativistas, el lagrangiano es del tipo dado por la ecuación (IV.15) [p. 69], y, de acuerdo con lo que hemos visto en la sección IV.1 (p. 65), el momento total se conserva.

La afirmación anterior también es válida si las partículas no son enteramente libres, sino que interactúan entre sí, a condición de que se utilice un lagrangiano que tome en cuenta la interacción. Sin embargo, en muchos casos prácticos, la interacción entre las partículas es tal que se produce casi puntualmente, cuando éstas se "tocan". Tal es el caso de un choque elástico entre partículas puntuales. En ese caso, el lagrangiano antes y después de la interacción es el de un sistema de partículas libres, y la suma de los momentos también se conserva: es la misma antes y después de la interacción.

Así, volviendo a la ley de conservación (IV.28), la componente 0 corresponde a la conservación de la energía total, mientras que las componentes espaciales representan la conservación del momento $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$. Nótese que, en la teoría de la relatividad, la masa y la energía no se conservan por separado, ya que una puede convertirse en la otra.

Veamos a continuación algunos ejemplos importantes.

IV.3.1 Efecto Compton[5]

Al chocar un fotón con un electrón, el fotón puede cambiar su frecuencia. Según la ley de la conservación del cuadrimomento, se tiene

$$P^\alpha + k^\alpha = P'^\alpha + k'^\alpha, \tag{IV.29}$$

donde P^α y k^α son los cuadrimomentos del electrón y fotón, respectivamente, y las primas designan éstos después del choque.

Para calcular el cambio de frecuencia del fotón, se despeja P'^α de la ecuación (IV.29) —si no interesa el momento final del electrón— y se toma la magnitud:

$$(P^\alpha + k^\alpha - k'^\alpha)^2 = (P'^\alpha)^2. \tag{IV.30}$$

Pero $(k^\alpha)^2 = 0 = (k')^2$ y $(P^\alpha)^2 = -m^2c^2 = (P')^2$ según la ecuación (IV.24),

[5] Arthur Holly Compton (1892-1962), físico estadounidense; ganó el premio Nobel en 1927 por el descubrimiento del efecto que lleva su nombre.

donde m es la masa del electrón. Además, en el sistema de laboratorio en el que el electrón está inicialmente en reposo, se tiene

$$P^\alpha = (mc, \mathbf{0})$$
$$k^\alpha = \frac{h}{\lambda}(1, \mathbf{n})$$
$$k'^\alpha = \frac{h}{\lambda'}(1, \mathbf{n}'),$$

así que la ecuación (IV.30) toma la forma:[6]

$$-m^2c^2 + 2P \cdot k - 2P \cdot k' - 2k \cdot k' = -m^2c^2,$$

de donde resulta, con un poco de álgebra,

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta), \tag{IV.31}$$

siendo θ el ángulo de desviación del fotón, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = \cos\theta$.

La cantidad h/mc tiene dimensiones de longitud y se conoce como *longitud de onda de Compton*, λ_C. Para un electrón, tiene el valor $\lambda_C = 0.024\,\text{Å}$ (2.4×10^{-12} m), que corresponde a la longitud de onda de un rayo γ. El efecto Compton es prácticamente imperceptible para la luz visible (4000 a 8000 Å), pero se puede detectar para rayos X energéticos ($\lambda < 1\,\text{Å}$).

IV.3.2 Desintegración de partículas

Como un siguiente ejemplo, consideremos la reacción en la que una partícula de masa M se desintegra en dos partículas de masas m_1 y m_2. Se tiene

$$P^\alpha = P_1^\alpha + P_2^\alpha, \tag{IV.32}$$

donde, en el sistema en el cual la partícula estaba originalmente en reposo,

$$P^\alpha = (Mc, \mathbf{0})$$
$$P_1^\alpha = \left(\frac{E_1}{c}, \mathbf{P}_1\right) \tag{IV.33}$$
$$P_2^\alpha = \left(\frac{E_2}{c}, \mathbf{P}_2\right).$$

[6] Para cuadrivectores A^α y B^α, usaremos ocasionalmente la notación más ligera A y B; y, para el producto escalar, $A \cdot B$ en lugar de $A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu = -A^0 B^0 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

La componente 0 de la ecuación (IV.32) implica que

$$Mc^2 = E_1 + E_2,$$

y como $E_1 > m_1c^2$, $E_2 > m_2c^2$ se obtiene la condición

$$M > m_1 + m_2$$

para que la reacción sea posible.

Las componentes espaciales de la ecuación (IV.32) son

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = 0,$$

por lo que $|\mathbf{P}_1|^2 = |\mathbf{P}_2|^2$. Además, se tiene

$$\frac{E_1^2}{c^2} - |\mathbf{P}_1|^2 = m_1^2c^2$$
$$\frac{E_2^2}{c^2} - |\mathbf{P}_2|^2 = m_2^2c^2,$$

de donde

$$E_1^2 - E_2^2 = (m_1^2 - m_2^2)c^4. \tag{IV.34}$$

Pero $E_2 = Mc^2 - E_1$, así que la ecuación (IV.34) implica que

$$E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}c^2$$
$$E_2 = \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M}c^2. \tag{IV.35}$$

Las energías de las dos partículas después de la desintegración están enteramente determinadas por las masas M, m_1, m_2.

EJERCICIO IV.6. Un núcleo emite un fotón γ a costa de que su masa M se reduzca a $M - \Delta M$. Demuestre que la energía del fotón emitido es

$$h\nu = \Delta M\left(1 - \frac{\Delta M}{2M}\right)c^2.$$

En general, $h\nu < \Delta Mc^2$. El término $\Delta M/2M$ corresponde al efecto de retroceso del núcleo. En el efecto Mössbauer, el retroceso es compartido por todos los núcleos del cristal ($\approx 10^{23}$ núcleos) y los fotones emitidos tienen prácticamente la misma frecuencia $\nu = \Delta Mc^2/h$, gracias a lo cual se puede tener radiación con una energía sumamente precisa.

IV.3.3 La reacción $e^+ e^- \to \gamma\gamma$

Es un hecho fundamental de la naturaleza que a cada tipo de partículas corresponde una *antipartícula*, con la misma masa pero carga eléctrica de signo contrario. Así, al electrón le corresponde el positrón, de carga positiva, y al protón el antiprotón, de carga negativa.[7] Cuando una partícula se encuentra con su correspondiente antipartícula, las dos se aniquilan y se transforman en un par de fotones. La aniquilación materia-antimateria es el proceso más eficiente en la naturaleza para transformar masa en energía, ya que la totalidad de la masa de un par de partícula-antipartícula se convierte en radiación.

Cuando chocan un electrón y un positrón, se desintegran produciendo un par de rayos γ. El proceso se describe de la siguiente manera:

$$P_-^\alpha + P_+^\alpha = P_1^\alpha + P_2^\alpha, \tag{IV.36}$$

donde los cuadrimomentos están dados por

$$\text{positrón:}\quad P_+ = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{P}\right)$$

$$\text{electrón:}\quad P_- = (mc, 0)$$

$$\text{fotón 1:}\quad P_1 = \frac{h}{\lambda_1}(1, \mathbf{n}_1)$$

$$\text{fotón 2:}\quad P_2 = \frac{h}{\lambda_2}(1, \mathbf{n}_2),$$

en un sistema en el que el electrón está originalmente en reposo y el positrón choca con él. Elevando al cuadrado la ecuación (IV.36) se tiene

$$-2m^2c^2 + 2P_+ \cdot P_- = 2P_1 \cdot P_2,$$

de donde resulta

$$m^2c^2 + Em = \frac{h^2}{\lambda_1\lambda_2}(1 - \cos\theta) \tag{IV.37}$$

(mencionemos, al respecto, que la reacción $e^+e^- \to \gamma$ no es posible, pues se tendría la ecuación (IV.37) con el miembro derecho igual a cero, o sea $E + mc^2 = 0$;

[7] El neutrón no tiene carga, pero se puede diferenciar del antineutrón por su orientación en un campo magnético.

Mr χ

la conservación del momento implica que al menos dos fotones deben crearse en el proceso de aniquilación).

De la ecuación (IV.37) resulta

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{h^2(1-\cos\theta)}{m(mc^2+E)} < (\lambda_C)^2.$$

Así, la energía de los fotones emitidos es del orden de la magnitud $h\nu_C = mc^2 \approx 511\,\text{keV}$, que corresponde a los rayos γ.

EJERCICIO IV.7. Considere el choque de dos fotones γ en un sistema de referencia en el que éstos tienen la misma frecuencia. Encuentre la relación entre esta frecuencia y la energía y momento de las partículas creadas. Demuestre que $h\nu > mc^2$ para que se pueda crear el par $e^+ e^-$.

IV.3.4 Choques inelásticos

En un choque inelástico, cambian las partículas debido a su interacción mutua. Vamos a considerar, como un ejemplo, la reacción llamada "fotoproducción de piones":

$$\gamma p \to \pi^+ n.$$

En esta reacción, el fotón incidente desaparece, transformando parte de su energía en masa para crear el mesón π. Es evidente que, para que eso suceda, la energía del fotón debe superar cierta *energía umbral,* que es del orden de la magnitud de $m_\pi c^2$.

Calculemos la energía umbral en forma exacta. Para ello, notemos que si una reacción de fotoproducción involucra la mínima energía necesaria, se debe tener al mesón π y al neutrón en reposo después de que se hayan producido, ya que de otra forma se requeriría energía adicional para moverlos. Sin embargo, en el sistema de laboratorio en que el protón está en reposo, no se puede tener al mesón y al neutrón simultáneamente en reposo, ya que el momento total después de la reacción sería cero, mientras que antes no lo era debido al momento que llevaba el fotón (el fotón no puede estar en reposo en ningún sistema). Pero si nos colocamos en un sistema *centro de momento* en el que la suma de los momentos del fotón y el protón es nula, entonces en ese sistema sí es posible tener al mesón y al neutrón ambos en reposo. Vista desde el sistema de laboratorio, esta reacción, que corresponde a la de mínima energía requerida, sucede así: el fotón choca con el protón y se produce un mesón y un neutrón que se mueven "pegados", como si fueran una sola partícula de masa $m_\pi + m_n$.

Con esta aclaración, podemos calcular la energía umbral. Por la conservación del cuadrimomento, se tiene

$$P_\gamma^\alpha + P_p^\alpha = P_{\pi+n}^\alpha. \tag{IV.38}$$

Elevando al cuadrado esta ecuación,

$$2P_\gamma \cdot P_p - m_\mathrm{p}^2 c^2 = -(m_\pi + m_\mathrm{n})^2 c^2.$$

Pero en el sistema de laboratorio,

$$P_\gamma = \frac{h\nu}{c}(1, \mathbf{n}), P_p = (m_\mathrm{p} c, \mathbf{0}),$$

de donde resulta

$$h\nu = \frac{\left[(m_\mathrm{n} + m_\pi)^2 - m_\mathrm{p}^2\right] c^2}{2m_\mathrm{p}}. \tag{IV.39}$$

Esta es la energía umbral: la mínima que debe tener el fotón para que se produzca la reacción considerada.

IV.4 Momento angular relativista

En mecánica clásica, el momento angular de una partícula en la posición **r** con momento lineal **p** es, por definición,

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}.$$

Esta cantidad tiene la propiedad muy importante de conservarse en ausencia de fuerzas externas. Veamos cómo este concepto se puede extender a la mecánica relativista.

Consideremos una partícula libre. Su línea de universo es una recta en el espacio-tiempo. Sobre esta línea, tomemos un evento con coordenadas x^α que ocurre en el tiempo t y definamos el tensor antisimétrico

$$M^{\alpha\beta} = x^\alpha p^\beta - x^\beta p^\alpha = -M^{\beta\alpha}, \tag{IV.40}$$

donde p^α es el cuadrimomento (constante) de la partícula.

A continuación, demostraremos que este tensor es independiente del suceso x^α que se escoja sobre la línea de universo. En efecto, si $\bar{x}^\alpha$ es otro suceso sobre la línea de universo de la partícula (figura IV.1), definimos

$$\bar{M}^{\alpha\beta} = \bar{x}^\alpha p^\beta - \bar{x}^\beta p^\alpha,$$

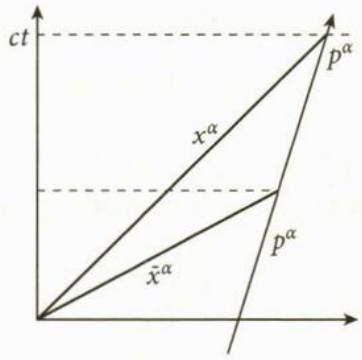


FIGURA IV.1

y entonces

$$M^{\alpha\beta} - \bar{M}^{\alpha\beta} = (x^\alpha - \bar{x}^\alpha)p^\beta - (x^\beta - \bar{x}^\beta)p^\alpha. \qquad \text{(IV.41)}$$

Pero $\bar{x}^\alpha - x^\alpha$ es un cuadrivector en la misma dirección que u^α (o p^α), así que $x^\alpha - \bar{x}^\alpha = Fp^\alpha$, donde F es algún escalar. La ecuación (IV.40) implica, por lo tanto, que

$$M^{\alpha\beta} - \bar{M}^{\alpha\beta} = F(p^\alpha p^\beta - p^\beta p^\alpha) = 0,$$

o sea,

$$M^{\alpha\beta} = \bar{M}^{\alpha\beta},$$

y $M^{\alpha\beta}$ es efectivamente independiente del tiempo que se escoge para el suceso x^α, es decir, *se conserva.*

Es evidente que si se tienen varias partículas libres que no chocan entre ellas, tendremos que

$$M^{\alpha\beta}_{\text{total}} = \sum_i M^{\alpha\beta}_i$$

también se conserva, ya que no importa en qué tiempo se mide $M^{\alpha\beta}_i$ para cada partícula.

Ahora demostraremos que $M^{\alpha\beta}_{\text{total}}$ también se conserva si hay choques elásticos entre las partículas. En efecto, si dos partículas con cuadrimomentos p^α_1 y p^β_2 chocan en el punto evento X_0, entonces, justo antes del choque,

$$\begin{aligned} M^{\alpha\beta}_{\text{total}} &= x^\alpha_0 p^\beta_1 - x^\beta_0 p^\alpha_1 + x^\alpha_0 p^\beta_2 - x^\beta_0 p^\alpha_2 \\ &= x^\alpha_0 \left(p^\beta_1 + p^\beta_2\right) - x^\beta_0 \left(p^\alpha_1 + p^\alpha_2\right), \end{aligned}$$

y justo después:

$$M'^{\alpha\beta}_{\text{total}} = x_0^\alpha p_1'^\beta - x_0^\beta p_1'^\alpha + x_0^\alpha p_2'^\beta - x_0^\beta p_2'^\alpha$$
$$= x_0^\alpha \left(p_1'^\beta + p_2'^\beta\right) - x_0^\beta \left(p_1'^\alpha + p_2'^\alpha\right),$$

y como $p_1^\alpha + p_2^\alpha = p_1'^\alpha + p_2'^\alpha$, resulta que $M^{\alpha\beta}_{\text{total}} = M'^{\alpha\beta}_{\text{total}}$, o sea, se conserva. Evidentemente, esto se generaliza a N partículas y se puede afirmar, por lo tanto, que

$$M^{\alpha\beta}_{\text{total}} = \sum_i M_i^{\alpha\beta}$$

es una cantidad conservada aun si chocan entre sí las partículas.

El tensor $M^{\alpha\beta}$ tiene 6 componentes algebraicamente independientes que podemos agrupar como

$$(M^{01}, M^{02}, M^{03}), (M^{12}, M^{23}, M^{31}),$$

las cuales se pueden interpretar como un par de vectores en 3 dimensiones (un bivector). Es fácil ver de la definición (IV.40) que las componentes puramente espaciales coinciden con las del vector de momento angular total de la mecánica clásica:

$$\mathbf{M} = \sum_n \mathbf{r}_n \times \mathbf{p}_n.$$

ya que $M^{23} = M_x$, $M^{31} = M_y$, $M^{12} = M_z$.

Las componentes M^{01}, M^{02}, M^{03}, a su vez, forman el vector

$$\sum_n \left(t\mathbf{p}_n - \frac{E_n \mathbf{r}_n}{c^2}\right),$$

que debe ser constante, según ya vimos.

Ahora bien, dado que la energía total $\sum_n E_n$, se conserva, podemos poner esta última expresión en la forma

$$\frac{\sum_n E_n \mathbf{r}_n}{\sum_n E_n} - t\frac{c^2 \sum_n \mathbf{p}_n}{\sum_n E_n} = \text{constante}.$$

Si definimos

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_n E_n \mathbf{r}_n}{\sum_n E_n} \qquad \text{(IV.42)}$$

y

$$\mathbf{V} = \frac{c^2 \sum_n \mathbf{p}_n}{\sum_n E_n}, \tag{IV.43}$$

resulta, por lo tanto, que

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}t + \text{constante}, \tag{IV.44}$$

o sea que **R** se mueve con velocidad constante **V**. La fórmula (IV.42) expresa la generalización del concepto de centro de inercia: en el límite no relativista se tiene $E \to mc^2$, y los vectores **R** y **V** se reducen a las definiciones clásicas de centro de masa y velocidad del centro de momento, respectivamente.

Siendo **V** constante, es evidente que siempre se puede hacer una transformación de Lorentz a un sistema inercial en el que $\mathbf{V} = \mathbf{0}$. Además, escogiendo adecuadamente el origen de coordenadas, también se puede poner $\mathbf{R} = \mathbf{0}$. Se llama *sistema centro de momento* aquel en el cual la suma de todos los momentos es nula. Como acabamos de demostrar, el *sistema centro de momento es un sistema inercial.*

Así, vemos que, en relatividad, la conservación del momento angular total y la conservación de la velocidad del centro de momento se unen en una sola ley: conservación del momento angular relativista $M^{\alpha\beta}_{\text{total}}$.

IV.5 Variables de Mandelstam

Consideremos ahora el caso más general posible de dos partículas que chocan entre sí, ya sea elástica o inelásticamente, transformándose en otras dos partículas.

Sean P_1^α y P_2^α los cuadrimomentos de las dos partículas antes de la reacción, y P_3^α, P_4^α los cuadrimomentos de las dos partículas después de la reacción. La conservación del cuadrimomento implica que

$$P_1^\alpha + P_2^\alpha = P_3^\alpha + P_4^\alpha.$$

Para estudiar este tipo de procesos, es muy conveniente utilizar las llamadas variables de Mandelstam, que se definen como los tres escalares (o invariantes de la reacción)

$$\begin{aligned} s &= -(P_1 + P_2)^2 = -(P_3 + P_4)^2 \\ t &= -(P_1 - P_3)^2 = -(P_2 - P_4)^2 \\ u &= -(P_1 - P_4)^2 = -(P_2 - P_3)^2. \end{aligned}$$

Cualquier otro escalar que se pueda formar combinando los 4 cuadrimomentos P^α es necesariamente una combinación de s, t y u. Además, estos tres escalares no son independientes entre sí porque

$$s + t + u = \left(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2\right) c^2,$$

donde m_i es la masa de la partícula i.

EJERCICIO IV.8. Demuestre la fórmula anterior.

Para elucidar el sentido físico de estos escalares, consideremos la reacción en el sistema centro de momento. En ese sistema, se tiene

$$\begin{aligned} P_1^\alpha &= (E_1/c, \mathbf{P}) \\ P_2^\alpha &= (E_2/c, -\mathbf{P}) \\ P_3^\alpha &= (E_3/c, \mathbf{P}') \\ P_4^\alpha &= (E_4/c, -\mathbf{P}'), \end{aligned}$$

donde E_i es la energía de la partícula i, $\mathbf{P}$ (o $-\mathbf{P}$) es el momento de la partícula 1 (o 2), y $\mathbf{P}'$ (o $-\mathbf{P}'$) es el momento de la partícula 3 (o 4); recuérdese que todas estas cantidades están medidas en el sistema centro de momento. Ahora es fácil ver que

$$\begin{aligned} s &= (E_1 + E_2)^2/c^2 = (E_3 + E_4)^2/c^2 \\ t &= \left(m_1^2 + m_3^2\right) c^2 - 2E_1E_3/c^2 + 2|\mathbf{P}||\mathbf{P}'| \cos\theta, \end{aligned}$$

donde θ es el ángulo de dispersión (figura IV.2)

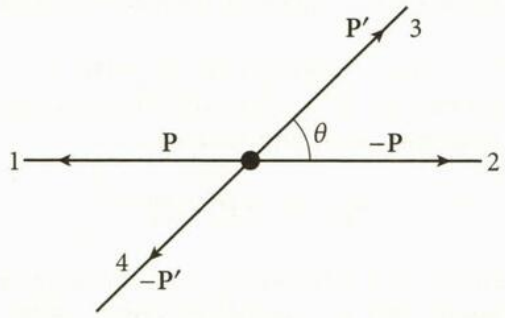


FIGURA IV.2

EJERCICIO IV.9. Utilice las variables de Mandelstam para estudiar el efecto Compton. Relacione las energías y ángulos de dispersión en los sistemas de laboratorio y centro de momento.

EJERCICIO IV.10. Mismo análisis para la fotoproducción de piones.

IV.6 El cohete relativista

Como un ejemplo de aplicación de la mecánica relativista, vamos a considerar el problema de una nave espacial que puede alcanzar velocidades cercanas a la de la luz.

Para empezar, veremos el caso clásico y después lo extenderemos a velocidades relativistas. *En su versión más simple, el problema se reduce al de un* cohete en el espacio que arroja materia con una velocidad V (con respecto al cohete) hacia atrás, con lo cual adquiere cierta velocidad hacia adelante.

Sean m_1 y v_1 la masa y la velocidad del cohete en determinado momento. Un instante después, el cohete arroja una masa m_3 hacia atrás, para adquirir una velocidad v_2 hacia adelante. Sea v_3 la velocidad de la masa arrojada hacia atrás y m_2 la masa del cohete después de arrojarla (figura IV.3). Por conservación de la masa y del momento, tenemos

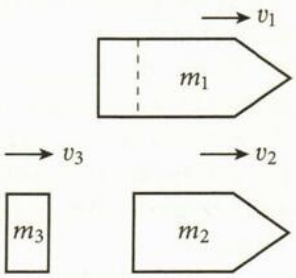


Figura IV.3

$$m_1 - m_3 = m_2 \tag{IV.45}$$

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 + m_3 v_3. \tag{IV.46}$$

Recuérdese que estas velocidades están medidas en el sistema de la Tierra, mientras que, en el sistema del cohete, la materia eyectada tiene una velocidad cuya magnitud es V. Dado que la velocidad del sistema en reposo del cohete justo antes de arrojar masa es v_1, se tiene

$$v_3 = v_2 - V. \tag{IV.47}$$

Ahora, podemos sustituir (IV.45) y (IV.47) en la ecuación (IV.46) para obtener una relación que no involucre m_3 y v_3:

$$V(m_1 - m_2) = m_1(v_2 - v_1). \tag{IV.48}$$

El siguiente paso consiste en pasar al límite infinitesimal poniendo $m_1 = m$, $m_2 = m + dm$, $v_1 = v$, $v_2 = v + dv$, y así obtener la ecuación

$$-V\,dm = m\,dv. \tag{IV.49}$$

En el caso en que la velocidad de eyección V es constante, la ecuación (IV.49) se integra inmediatamente, con el resultado de que

$$v = V \ln\left(\frac{m_0}{m}\right), \tag{IV.50}$$

donde m_0 es una constante de integración, que corresponde simplemente a la masa que poseía el cohete cuando estaba en reposo. La ecuación (IV.50) es la fórmula para la velocidad del cohete en función de la fracción de masa consumida, m/m_0. Un hecho muy importante es que la velocidad alcanzada depende únicamente de *cuánto* combustible se quema, pero *no* del mecanismo de combustión.

También la ecuación (IV.50) implica que la velocidad alcanzada por un cohete es típicamente del orden de la velocidad de eyección de la materia de sus turbinas.

Como la velocidad alcanzada depende logarítmicamente de la masa de combustible quemada, un enorme incremento en el combustible transportado redunda en un modesto incremento de la velocidad. La razón física es que, para alcanzar velocidades muy altas, se necesita cargar más combustible, pero, a su vez, gran parte de ese combustible se tiene que utilizar para transportarse a sí mismo.

Es evidente de la ecuación (IV.50) que, para alcanzar velocidades cercanas a la de la luz, es necesario que la velocidad de eyección sea del orden de c, lo cual hace necesario un tratamiento relativista. Veamos, pues, cómo generalizar el análisis anterior al caso de velocidades relativistas.

En primer lugar, la conservación de masa y energía implica que, en lugar de (IV.45), tengamos

$$\gamma_1 m_1 - \gamma_3 m_3 = \gamma_2 m_2, \tag{IV.51}$$

donde, por supuesto, $\gamma_i = (1 - v_i^2/c^2)^{-1/2}$. La conservación del momento nos da, en lugar de (IV.46), la ecuación más general

$$\gamma_1 m_1 v_1 = \gamma_2 m_2 v_2 + \gamma_3 m_3 v_3. \tag{IV.52}$$

Finalmente, la fórmula relativista para la adición de velocidades nos da la generalización de la ecuación (IV.47) en la forma

$$v_3 = \frac{v_2 - V}{1 - v_2 V/c^2}. \tag{IV.53}$$

Ahora, combinamos las ecuaciones (IV.51), (IV.52) y (IV.53), para eliminar $\gamma_3 v_3$ y m_3. Queda, después de un poco de álgebra,

$$V(\gamma_1 m_1 - \gamma_2 m_2) - \frac{V v_1}{c^2}(\gamma_1 m_1 v_1 - \gamma_2 m_2 v_2) = \gamma_1 m_1 (v_2 - v_1), \tag{IV.54}$$

como generalización relativista de la ecuación (IV.48).

De aquí en adelante, el procedimiento es como en el caso clásico. Primero, escribimos la ecuación (IV.54) en la forma diferencial:

$$-V\,d(\gamma m) + \frac{Vv}{c}\,d(\gamma m v) = \gamma m\,dv. \tag{IV.55}$$

Usando, luego, la relación

$$d\gamma = \frac{\gamma^3 v\,dv}{c^2},$$

resulta, después de algunos arreglos algebraicos,

$$-V\frac{dm}{m} = \frac{dv}{1 - v^2/c^2}, \tag{IV.56}$$

que es la generalización relativista de la ecuación (IV.49). Si V es constante, podemos integrar esta última ecuación, y obtener la fórmula

$$v = c\tanh\left[\frac{V}{c}\ln\left(\frac{m_0}{m}\right)\right], \tag{IV.57}$$

como la versión relativista de la ecuación (IV.50) —a la que tiende (IV.57) en el límite $V \ll c$, como puede comprobar recordando que $\tanh\varepsilon \approx \varepsilon$—. Nótese que, según la ecuación (IV.57), el factor de Lorentz es

$$\gamma = \cosh\left[\frac{V}{c}\ln\left(\frac{m_0}{m}\right)\right]. \tag{IV.58}$$

Supongamos que la nave espacial se mueve con *aceleración constante*. Vimos en el capítulo anterior que, para un movimiento uniformemente acelerado, la velocidad y el factor de Lorentz están dados por la fórmula

$$\begin{aligned} v &= c\tanh\left(\frac{a}{c}\tau\right) \\ \gamma &= \cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right), \end{aligned} \tag{IV.59}$$

donde τ es el tiempo propio en el sistema acelerado. Es fácil deducir cómo debe ser el consumo de combustible para que una nave espacial mantenga una aceleración uniforme. Para ello, basta comparar las ecuaciones (IV.57) y (IV.58) con (IV.59); si el combustible se consume exponencialmente, de acuerdo con la fórmula

$$m(\tau) = m_0 e^{-a\tau/V}, \tag{IV.60}$$

donde τ es el tiempo propio en la nave espacial, entonces se garantiza que ésta mantenga una aceleración uniforme a.

EJERCICIO IV.11. El combustible más energético que se puede imaginar es una mezcla de materia y antimateria. Suponga que, en un futuro muy lejano, se resuelve el problema de almacenar antimateria y se construye una nave que transporte una carga igual de materia y antimateria. Éstas, al entrar en contacto, se aniquilan transformando la totalidad de su masa en energía en forma de fotones (rayos γ), que son expelidos hacia atrás por la nave. Así, la velocidad de eyección es c. Quemando antimateria de acuerdo con la fórmula (IV.60) se logra que la nave se mueva con una aceleración $a = g$, para comodidad de su tripulación. Calcule la cantidad de materia y antimateria necesaria para realizar un viaje como el descrito en el ejercicio II.14 (p. 47) a

i) Alfa Centauri,

ii) el centro de nuestra galaxia,

iii) la nebulosa de Andrómeda.

Suponga que el peso útil de la nave (cabina, motor y tripulación) es de una tonelada (ésta debe ser la masa al término del viaje). ¿Es concebible fabricar o reunir tanta antimateria en la Tierra?

V. ELECTRODINÁMICA Y RELATIVIDAD

V.1 Ecuaciones de Maxwell (repaso)

El fundamento de la electrodinámica son las ecuaciones de Maxwell para los campos eléctrico **E** y magnético **B**:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \tag{V.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{V.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{V.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{V.4}$$

donde ρ es la densidad de carga y **J** la densidad de corriente eléctrica.

Estas ecuaciones resumen en forma diferencial todos los fenómenos clásicos relacionados con el electromagnetismo. La ecuación (V.1) corresponde a la ley de Gauss, que generaliza la fórmula de Coulomb para la fuerza ejercida por una carga sobre otra; la ecuación (V.2) expresa la ley de inducción de Faraday; la ecuación (V.3) es la condición de que no existan cargas magnéticas aisladas (monopolos magnéticos) en la naturaleza; la ecuación (V.4) es la ley de Ampère con el término adicional de Maxwell para la corriente de desplazamiento.

Existen muchos y muy buenos textos de teoría electromagnética, por lo que no entraremos en mayores detalles de las ecuaciones de Maxwell (aunque sí recomendamos al lector estudiarlas por separado).

En este curso de relatividad, empezaremos directamente de estas ecuaciones fundamentales y veremos cómo la teoría de la relatividad surge de ellas.

NOTA: En este texto utilizaremos unidades gaussianas. Por ejemplo, **E** y **B** tienen dimensiones: $(\text{gramos})^{1/2}/(\text{cm})^{1/2}(\text{segundo})$, y la fuerza de Coulomb entre dos cargas eléctricas q_1 y q_2 es $F = q_1 q_2 / r^2$.

De las ecuaciones (V.1) y (V.4) se obtiene la ecuación de conservación de la carga:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \tag{V.5}$$

En general, una densidad de carga ρ con velocidad $\mathbf{v}$ produce una corriente:

$$\mathbf{J} = \rho\mathbf{v} \tag{V.6}$$

Por otra parte, la fuerza que actúa sobre una partícula de carga e está dada por la fuerza de Lorentz:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right), \tag{V.7}$$

donde $\mathbf{p}$ es el momento de la partícula.

Hay que notar que las ecuaciones de Maxwell describen el campo electromagnético producido por cargas en movimiento, pero no describen el movimiento de una carga en un campo electromagnético dado. Esto último se complementa con la expresión para la fuerza de Lorentz.

Como se mencionó en el capítulo I, las ecuaciones de Maxwell *no* son invariantes frente a transformaciones de Galileo,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\to \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{V}t \\ t &\to t' = t, \end{aligned} \tag{V.8}$$

sino frente a transformaciones de Lorentz. Esto lo demostraremos más adelante.

V.1.1 Potenciales electromagnéticos

Es conveniente expresar el campo electromagnético en términos de potenciales. La ecuación de Maxwell (V.3) implica que existe un vector $\mathbf{A}$ tal que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{V.9}$$

Metiendo esto en la ecuación (V.2) se obtiene

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0,$$

lo cual implica, a su vez, que existe una función ϕ tal que

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{V.10}$$

Es importante notar que las ecuaciones (V.9) y (V.10) no cambian si en lugar de $\mathbf{A}$ y ϕ usamos

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi \qquad \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t}, \tag{V.11}$$

donde ψ es una función totalmente arbitraria. Esto se llama *invariancia de norma,*[1] y permite imponer alguna condición adicional sobre los potenciales. Por ejemplo, consideremos el escalar definido por

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t};$$

frente a una transformación de norma se vuelve, según la ecuación (V.11),

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi'}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\right)\psi. \tag{V.12}$$

De aquí se ve que siempre se puede escoger una ψ tal que

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi'}{\partial t} = 0; \tag{V.13}$$

para ello basta igualar a cero el miembro derecho de la ecuación (V.12) y resolver esta ecuación para ψ, lo cual es siempre posible pues es una ecuación diferencial para una sola función, ψ.

La norma con la que se cumple la condición (V.13) se llama *norma de Lorentz.*

Volviendo a las ecuaciones de Maxwell, usemos la ecuación (V.10) en la ecuación (V.1); se obtiene

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2 \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{A}}{\partial t} = 4\pi\rho.$$

Si usamos (V.9) en la ecuación (V.4) tenemos

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$
$$= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} - \frac{1}{c}\frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{c^2 \partial t^2}.$$

Utilizando la condición (V.13), estas dos ecuaciones se reducen a

$$-\Box\phi = 4\pi\rho \tag{V.14a}$$

$$-\Box\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}, \tag{V.14b}$$

[1]Norma = *gauge*, en inglés.

donde $$\Box = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$$ Mr χ

es el operador *d'alembertiano*.[2]

Nótese que este operador se puede escribir en la forma

$$\Box = \eta^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta} \tag{V.15}$$

y, por lo tanto, el *d'alembertiano es un operador escalar frente a transformaciones de Lorentz.*

V.2 El tensor electromagnético

Vamos a demostrar ahora que la densidad de carga ρ y la densidad de corriente J son las componentes de un cuadrivector. Para ello, recordemos el sentido de la ecuación de continuidad (V.5). Como veremos más detalladamente en el capítulo VI, una ecuación como ésta expresa, en forma diferencial, el hecho fundamental de que existen cantidades físicas (en este caso, las cargas eléctricas) que no se crean ni se destruyen: sólo pueden cambiar de lugar. Si imaginamos un volumen arbitrario en el espacio, la carga contenida dentro de él aumenta o disminuye según el flujo de carga que atraviesa su superficie. Esto es lo que representa, en forma diferencial, la ecuación (V.5). Si hubiera fuentes o sumideros de cargas, el lado derecho de esa ecuación no sería cero, sino alguna función proporcional a la tasa de creación o destrucción de cargas.

Ahora bien, el hecho de que las cargas eléctricas no se crean ni destruyen debe ser necesariamente independiente del sistema de referencia desde el cual se observan. Por lo tanto, la ecuación de continuidad (V.5) no debe cambiar de forma ante una transformación de Lorentz. Siguiendo con esta idea, definamos lo que podría ser un cuadrivector:

$$J^\alpha = (c\rho, \mathbf{J}), \tag{V.16}$$

y notemos que la ecuación (V.5) se puede escribir en la forma

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}J^\alpha = 0. \tag{V.17}$$

Dado que $\partial/\partial x^\alpha$ es un cuadrivector covariante, resulta que J^α debe ser un cuadrivector contravariante. De no ser así, el lado izquierdo de esta última ecuación no sería un escalar ante transformaciones de Lorentz y, por lo tanto,

[2] Jean le Rond d'Alembert (1717-1783). Físico, matemático y filósofo francés.

el lado derecho no tendría el valor cero en cualquier sistema de referencia: ¡esto implicaría que se crean o destruyen cargas! Así pues, J^α debe ser efectivamente un cuadrivector para garantizar la conservación de cargas eléctricas.

Si ahora definimos

$$A^\alpha = (\phi, \mathbf{A}), \tag{V.18}$$

resulta que las ecuaciones (V.14) se pueden escribir en la forma

$$-\Box A^\alpha = \frac{4\pi}{c} J^\alpha. \tag{V.19}$$

Como $\Box$ es un escalar y J^α es un cuadrivector, se deduce, a partir de esta última ecuación, que A^α *es un cuadrivector*: se le llama *cuadrivector potencial.*

Nótese que la ecuación (V.13) se puede escribir como

$$\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0, \tag{V.20}$$

lo cual implica que la norma de Lorentz es una condición que no cambia de forma al pasar de un sistema de referencia a otro. De hecho, la propiedad crucial de las ecuaciones (V.17), (V.19) y (V.20) es que no cambian sus formas ante transformaciones de Lorentz, como veremos más explícitamente un poco más adelante.

Ahora, definamos un tensor antisimétrico de rango 2:

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha}. \tag{V.21}$$

¿Cuáles son las componentes de $F_{\alpha\beta}$? Recordando que

$$A_\alpha = (-\phi, \mathbf{A})$$

y usando las ecuaciones (V.9) y (V.10), se obtiene, con un poco de álgebra,

$$F_{01} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} = E_x \qquad F_{12} = \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} = -B_z$$

$$F_{02} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} = E_y \qquad F_{23} = \frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} = -B_x$$

$$F_{03} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} = E_z \qquad F_{31} = \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} = -B_y.$$

Estas componentes se pueden juntar en forma de matriz:

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{V.22}$$

donde el primer índice corresponde a renglones y el segundo a columnas. También tenemos que las componentes contravariantes $F^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}F_{\mu\nu}$, están dadas por

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{V.23}$$

Ahora definamos el tensor dual de $F_{\alpha\beta}$ como

$$F^*_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\gamma\delta}. \tag{V.24}$$

Es fácil ver que

$$\begin{aligned} F^*_{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & -E_z & E_y \\ B_y & E_z & 0 & -E_x \\ B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix} \\ F^{*\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z & E_y \\ -B_y & E_z & 0 & -E_x \\ -B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{V.25}$$

EJERCICIO V.1. Demuestre que las ecuaciones de Maxwell (V.1)–(V.4) se pueden escribir como

$$\boxed{\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = -\frac{4\pi}{c}J^\alpha} \tag{V.26}$$

$$\boxed{\frac{\partial F^{*\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0} \tag{V.27}$$

De estas fórmulas se ve inmediatamente que las ecuaciones de Maxwell son invariantes frente a transformaciones de Lorentz, ya que en un nuevo sistema de referencia se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\beta}} = \Lambda_{\beta}^{-1\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$$

$$F'^{\alpha\beta} = \Lambda_{\nu}^{\alpha} \Lambda_{\rho}^{\beta} F^{\nu\rho}$$

$$J'^{\alpha} = \Lambda_{\nu}^{\alpha} J^{\nu},$$

y las ecuaciones de Maxwell toman la forma

$$\frac{\partial F'^{\alpha\beta}}{\partial x'^{\beta}} = -\frac{4\pi}{c} J'^{\alpha}, \qquad \frac{\partial F^{*\prime\alpha\beta}}{\partial x'^{\beta}} = 0,$$

o sea, *no cambian* de forma.

Se llaman *covariantes* aquellas ecuaciones, como las de Maxwell, que no cambian de forma frente a transformaciones de Lorentz.

Con lo anterior, podemos formular en forma clara el *Principio de la Relatividad Especial*, enunciado por Albert Einstein:

> *En sistemas inerciales, las leyes de la física son covariantes frente a transformaciones de Lorentz.*

Este principio es fundamental, ya que, en la práctica, es una guía para describir los fenómenos físicos por medio de ecuaciones matemáticas.

Veamos a continuación cómo se transforma el campo electromagnético frente a transformaciones de Lorentz. Consideremos una transformación a lo largo del eje x; la matriz de Lorentz correspondiente es

$$\Lambda_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma(V/c) & 0 & 0 \\ -\gamma(V/c) & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{V.28}$$

El tensor del campo electromagnético se transforma como

$$F^{\alpha\beta} \rightarrow F'^{\alpha\beta} = \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} F^{\mu\nu}. \tag{V.29}$$

EJERCICIO V.2. Utilizando las ecuaciones (V.23), (V.28) y (V.29) demuestre que

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma\left(E_y - \frac{V}{c}B_z\right) & B'_y &= \gamma\left(B_y + \frac{V}{c}E_z\right) \\ E'_z &= \gamma\left(E_z + \frac{V}{c}B_y\right) & B'_z &= \gamma\left(B_z - \frac{V}{c}E_y\right) \end{aligned} \tag{V.30}$$

son las ecuaciones que relacionan el campo electromagnético en dos sistemas inerciales. También demuestre que el inverso de estas transformaciones es

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x & B_x &= B'_x \\ E_y &= \gamma\left(E'_y + \frac{V}{c}B'_z\right) & B_y &= \gamma\left(B'_y - \frac{V}{c}E'_z\right) \\ E_z &= \gamma\left(E'_z - \frac{V}{c}B'_y\right) & B_z &= \gamma\left(B'_z + \frac{V}{c}E'_y\right) \end{aligned} \tag{V.31}$$

Nótese que, en el límite no relativista, $v/c \ll 1$ y $\gamma \approx 1$, estas últimas ecuaciones se reducen a la forma más general:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{B} \qquad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{E}.$$

V.2.1 Invariantes del campo

Si bien los campos eléctrico y magnético cambian de un sistema de referencia a otro, es conveniente contar con cantidades invariantes que no dependan de la velocidad del observador. Esto se logra gracias a que se puede construir un escalar y un seudoescalar a partir del tensor $F^{\alpha\beta}$:

$$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \qquad \text{y} \qquad F^*_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta}$$

EJERCICIO V.3. Demuestre, a partir de la forma explícita de $F_{\alpha\beta}$ y $F^*_{\alpha\beta}$, que

$$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 2\left(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2\right) \qquad F^*_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 4\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}.$$

Lo anterior implica que las cantidades

$$\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{E}\cdot\mathbf{B} \tag{V.32}$$

son invariantes frente a transformaciones de Lorentz. Esta propiedad es muy útil para determinar cualitativamente la forma en que se transforman los campos eléctricos y magnéticos. Por ejemplo, si $|\mathbf{B}| > |\mathbf{E}|$ en un sistema, lo será en cualquier otro; igualmente, si **E** y **B** son perpendiculares en un sistema lo serán en cualquier otro, etc.

Veamos con más detalle la clasificación del campo electromagnético usando estos invariantes.

1) Caso $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ y $\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2 = 0$.

   El campo eléctrico es perpendicular al magnético y los dos son de la misma magnitud. Estas condiciones se mantienen en cualquier sistema de referencia.

2) Caso $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ y $\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2 \neq 0$.

   Si los campos eléctrico y magnético son perpendiculares en un sistema de referencia, entonces siempre se puede encontrar otro sistema de referencia en el que 1) el campo eléctrico se anula, si $\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2 > 0$; o bien 2) el campo magnético se anula, si $\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2 < 0$. Tal sistema de referencia es uno que se mueve con velocidad perpendicular al plano formado por **E** y **B**. Volveremos a este caso en la p. 101.

3) Caso $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \neq 0$.

   Por último, si el producto escalar de **E** y **B** no es cero en un sistema, no podrá serlo en ningún otro, y, por lo tanto, **E** y **B** no pueden cancelarse. En todo caso, se puede encontrar un sistema de referencia en el que **E** y **B** sean paralelos.

EJERCICIO V.4. Demuestre, utilizando las leyes de transformación del campo electromagnético —ecuaciones (V.30)—, que si $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \neq 0$, entonces $\mathbf{E}'$ y $\mathbf{B}'$ son paralelos en un sistema de referencia que se mueve perpendicularmente al plano formado por **E** y **B**, y cuya velocidad V está dada por la ecuación

$$\frac{V/c}{1 + V^2/c^2} = \frac{EB}{E^2 + B^2} \operatorname{sen} \alpha,$$

donde α es el ángulo entre **E** y **B**. Demuestre que esta ecuación siempre tiene una solución física tal que $V/c < 1$. (Sugerencia: tome **E** y **B** en el plano yz.)

V.2.2 Fuerza de Lorentz

La fórmula (V.7) para la fuerza de Lorentz que actúa sobre una carga e se puede escribir en forma manifiestamente covariante:

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = -eF^{\alpha\beta}u_\beta. \tag{V.33}$$

EJERCICIO V.5. Encuentre las componentes espaciales de la ecuación (V.33) en términos de **E** y **B** y demuestre que se obtiene la ecuación (V.7). Demuestre, además, que la componente 0 de esta misma ecuación tiene la forma

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}, \tag{V.34}$$

donde $\mathcal{E}$ es la energía cinética. (Estamos haciendo un ligero cambio de notación para no confundir la energía cinética con el campo eléctrico E.) Interprete esta ecuación.

De lo anterior se deduce que la ecuación de Lorentz (V.7) es válida en relatividad también, a condición de tomar la definición relativista del momento:

$$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}.$$

Es importante notar que el tiempo t que aparece en la fuerza de Lorentz, ecuación (V.7), y en la ecuación (V.34) para la energía, es el tiempo en el sistema de laboratorio. Si se quiere utilizar el tiempo propio τ de la partícula, entonces hay que recordar que $dt = \gamma\, d\tau$, por lo que

$$dt = \frac{\mathcal{E}}{mc^2}\, d\tau.$$

Recuerde que $\mathcal{E} = mc^2\gamma$ y, además, $\mathbf{p} = \mathcal{E}\mathbf{v}/c^2$, así que podemos escribir las ecuaciones (V.7) y (V.34) en la forma alternativa:

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{e}{mc^2}(\mathcal{E}\mathbf{E} + c\mathbf{p}\times\mathbf{B}), \tag{V.35}$$

y

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = \frac{e}{m}\mathbf{E}\cdot\mathbf{p}. \tag{V.36}$$

EJERCICIO V.6. Demuestre que la ecuación (V.33) para el movimiento de una partícula cargada en un campo electromagnético se pueden obtener de extremalizar la acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(-mc^2\, d\tau + \frac{e}{c} A_\mu\, dx^\mu\right),$$

donde A_μ es el cuadrivector potencial del campo. Justifique la forma de esta acción. Demuestre que el lagrangiano es explícitamente

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} - e\phi.$$

Demuestre que el impulso generalizado es

$$\mathbf{P} = m\gamma\mathbf{v} + \frac{e}{c}\mathbf{A}$$

y el hamiltoniano es

$$H = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2} + e\phi.$$

V.3 Movimiento de partículas cargadas en campos eléctricos o magnéticos constantes

En esta sección vamos a estudiar el movimiento de partículas cargadas en un campo electromagnético, cuando este campo tiene una forma relativamente simple, pero de interés físico.

V.3.1 Campo magnético constante

Consideremos el movimiento de una carga en un campo magnético uniforme y constante, sin campo eléctrico. Podemos escoger las coordenadas tales que

$$\mathbf{B} = (0, 0, B) \qquad \mathbf{E} = 0.$$

Para empezar, se puede ver fácilmente que la energía cinética de la partícula es constante porque, de acuerdo con la ecuación (V.34),

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0 \qquad \text{si} \qquad \mathbf{E} = 0.$$

Si $\mathcal{E}$ es constante, el factor de Lorentz γ es constante, y, por lo tanto, también es constante la magnitud de la velocidad de la partícula. Sólo variará la dirección de la velocidad.

Como el momento de la partícula es $\mathbf{p} = \mathcal{E}\mathbf{v}/c^2$, la ecuación de Lorentz toma la forma

$$\frac{\mathcal{E}}{c^2}\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

o sea, explícitamente

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= \omega v_y \\ \dot{v}_y &= -\omega v_x \\ \dot{z} &= 0, \end{aligned}$$

donde hemos definido $\omega = ecB/\mathcal{E}$. Resulta conveniente combinar estas ecuaciones en forma compleja:

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i\omega(v_x + iv_y),$$

lo cual se puede integrar inmediatamente, con el resultado

$$v_x + iv_y = ae^{-i\omega t},$$

donde a es una constante (compleja).

Poniendo $a = v_0 e^{-i\alpha}$ se obtiene (recordando que $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$)

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos(\omega t + \alpha) \\ v_y &= -v_0 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \\ v_0 &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \text{constante}. \end{aligned} \tag{V.37}$$

Como $v_x = dx/dt$, etc., podemos integrar la ecuación (V.37), con el resultado final

$$\begin{aligned} x &= x_0 + R\operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \\ y &= y_0 + R\cos(\omega t + \alpha) \\ z &= z_0 + v_{0z}t, \end{aligned} \tag{V.38}$$

donde $R = v_0/\omega = v_0\mathcal{E}/ecB$.

En resumen, la partícula describe una hélice de radio R y gira con frecuencia

$$\omega = \frac{ecB}{\mathcal{E}} = \gamma^{-1}\frac{eB}{mc}.$$

Ambas cantidades medidas en el sistema de laboratorio.

En el límite no relativista, $\gamma \approx 1$ y $\omega = eB/mc$, que es independiente de la velocidad de la partícula.

Nótese que la partícula cargada se mueve con una velocidad constante a lo largo del campo magnético. Esta velocidad es justamente la inicial. Además, la partícula gira alrededor de la dirección del campo magnético, en dirección negativa (sentido de las manecillas del reloj) si la carga es positiva, y viceversa.

V.3.2 Campo eléctrico constante

Estudiemos ahora el movimiento de una partícula cargada en un campo eléctrico constante. Debido al campo eléctrico, la partícula adquiere una aceleración, la cual vamos a calcular a continuación.

Escojamos el eje x de las coordenadas a lo largo del campo eléctrico. Entonces $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$ y $\mathbf{B} = 0$. La ecuación (V.7) para la fuerza de Lorentz implica

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= eE \\ \dot{p}_y &= 0 \\ \dot{p}_z &= 0, \end{aligned} \tag{V.39}$$

donde el punto indica derivada con respecto al tiempo t en el sistema en reposo.

Del mismo modo, tenemos para la energía $\mathcal{E}$ de la partícula

$$\dot{\mathcal{E}} = eEv_x, \tag{V.40}$$

de acuerdo con la ecuación (V.34).

Sin perder generalidad, podemos suponer que la velocidad inicial de la partícula se encuentra en el plano (x, y) y que parte del origen en el tiempo $t = 0$. De acuerdo con las ecuaciones (V.39), la partícula se mantendrá siempre en este plano, pues no hay ninguna fuerza en la dirección z.

En este problema es más conveniente utilizar el tiempo propio τ de la partícula como parámetro, en lugar del tiempo de laboratorio. En términos de τ, las ecuaciones (V.35) y (V.36) se reducen a

$$\frac{dp_x}{d\tau} = \frac{eE}{mc^2}\mathcal{E} \tag{V.41a}$$

$$\frac{dp_y}{d\tau} = 0 \tag{V.41b}$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = \frac{eE}{m}p_x, \tag{V.41c}$$

y, por supuesto, $\mathbf{p} = m\,d\mathbf{x}/d\tau$.

Vemos inmediatamente de (V.41b) que p_y se conserva y, por lo tanto,

$$y = \frac{p_{0y}}{m}\tau, \tag{V.42}$$

donde p_{0y} es la componente y del momento en el tiempo $\tau = 0$.

Ahora escribamos las ecuaciones (V.41a) y (V.41c) en la forma

$$c\frac{dp_x}{d\eta} = \mathcal{E} \tag{V.43}$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\eta} = cp_x, \tag{V.44}$$

donde hemos definido el tiempo adimensional $\eta = eE\tau/mc$. La solución más general de este par de ecuaciones es

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= cp_{0x}\,\operatorname{senh}\eta + \mathcal{E}_0\cosh\eta \\ cp_x &= cp_{0x}\cosh\eta + \mathcal{E}_0\,\operatorname{senh}\eta, \end{aligned} \tag{V.45}$$

donde p_{0x} y $\mathcal{E}_0$ son constantes de integración que podemos identificar como la componente x del momento y la energía cinética en el momento inicial $\tau = 0$.

Para encontrar la ecuación paramétrica de la trayectoria, basta recordar que $\mathcal{E} = mc^2\,dt/d\tau$ y $p_x = m\,dx/d\tau$, de donde resulta, después de una integración de las ecuaciones (V.45),

$$ct = (eE)^{-1}[cp_{0x}(\cosh\eta - 1) + \mathcal{E}_0\,\operatorname{senh}\eta] \tag{V.46}$$

$$x = (eE)^{-1}[\mathcal{E}_0(\cosh\eta - 1) + cp_{0x}\,\operatorname{senh}\eta]. \tag{V.47}$$

Estas dos ecuaciones, junto con la ecuación (V.42), determinan completamente el movimiento de la partícula cargada.

Es interesante notar que si la partícula parte inicialmente del reposo total, adquiere un movimiento *uniformemente acelerado* a lo largo del campo eléctrico, con una aceleración eE/m (incidentalmente, este es el mismo valor

de la aceleración que se obtiene en el caso no relativista de una carga en un campo eléctrico constante). Este es un ejemplo físico del movimiento acelerado descrito en el capítulo IV; como vimos en este capítulo, la velocidad de la partícula aumenta de acuerdo con la fórmula

$$v = c \tanh\left(\frac{eE}{mc}\tau\right).$$

(En la práctica, la partícula emite parte de su energía en forma de radiación electromagnética; este efecto es bastante complicado y no está tomado en cuenta en el análisis que presentamos aquí.)

V.3.3 Campo electromagnético constante

Ahora, vamos a considerar el caso de una partícula cargada que se mueve en campos eléctricos y magnéticos uniformes. En general, es conveniente escoger un sistema de referencia en el que el campo tiene una forma particularmente cómoda para efectuar los cálculos correspondientes. Un ejemplo ilustrativo ocurre cuando el campo eléctrico es perpendicular al magnético, ya que, en ese caso, siempre se puede encontrar un sistema de referencia en el que se anule ya sea el campo eléctrico o el magnético. Este es el problema que estudiaremos a continuación.

Sean $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ arbitrarios. Si $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \neq 0$, entonces no existe ningún sistema de referencia en el que $\mathbf{E}$ o $\mathbf{B}$ se cancelan, ya que $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ es un escalar (como vimos anteriormente) y no cambia frente a transformaciones de Lorentz. Pero si $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = 0$, entonces sí se puede encontrar un sistema de referencia en el que ya sea $\mathbf{E}$ o $\mathbf{B}$ se cancele. Recordemos que $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$ también es un invariante, así que si $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 > 0$, podemos encontrar un sistema en el que $\mathbf{B} = 0$, y si $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 < 0$, entonces podemos cancelar $\mathbf{E}$ en algún sistema particular.

Consideremos un campo electromagnético uniforme tal que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son perpendiculares y $|B| > |E|$. Escojamos los ejes de coordenadas tales que

$$\mathbf{E} = (0, E, 0)$$
$$\mathbf{B} = (0, 0, B).$$

Si ahora pasamos a un sistema de referencia S' que se mueve con velocidad V a lo largo del eje x, tenemos que, de acuerdo con las ecuaciones (V.30), el campo electromagnético en el nuevo sistema está dado por

$$\mathbf{E}' = (0, \gamma(E - BV/c), 0)$$
$$\mathbf{B}' = (0, 0, \gamma(B - EV/c)).$$

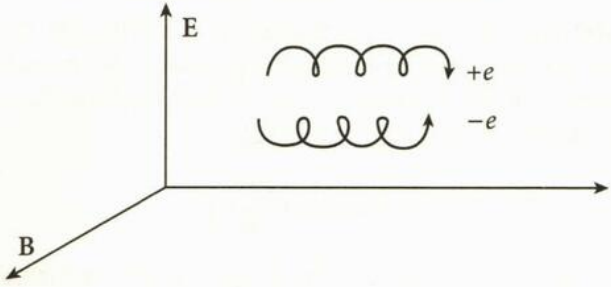


FIGURA V.1

Escogiendo

$$V = \frac{E}{B}c$$

(lo cual es posible porque $E < B$ y, por lo tanto, $V < c$), resulta que el campo eléctrico $\mathbf{E}'$ se anula en el sistema S', y el campo magnético cambia su magnitud:

$$\mathbf{B}' = \left(0, 0, \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\, B\right).$$

Una forma más general de este resultado es la siguiente:

Si $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son tales que $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ y $B^2 - E^2 > 0$, entonces, el campo eléctrico se anula en un sistema con velocidad

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}c.$$

Después de estas consideraciones preliminares, regresemos al caso de una partícula cargada en un campo eléctrico y magnético perpendiculares. Si $E < B$, nos colocamos en el sistema S' en el que $\mathbf{E}' = 0$. En ese sistema, sólo hay campo magnético y, como vimos en la sección anterior, la partícula gira en círculos alrededor de un centro fijo con una frecuencia $\omega = ecB/\mathcal{E}$. Pero el centro fijo en S' se mueve con velocidad $V = (E/B)c$ en el sistema S, así que la partícula adquiere una velocidad promedio perpendicular a $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ —figura V.1—, cuya magnitud es Ec/B. Esta es la llamada *velocidad de deriva*. (Nótese que esta velocidad promedio es independiente de la carga de la partícula.)

Un caso particular es el de una partícula cuya velocidad es perpendicular a $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ y coincide exactamente con la velocidad de deriva. En el sistema S', tal partícula está en reposo, y *se mantiene en reposo* porque la fuerza de Lorentz que actúa sobre ella, en S', es nula (tanto el campo eléctrico como la velocidad

de la partícula son nulas). En el sistema S, la partícula aparece moviéndose en línea recta. Este hecho se utiliza en la práctica para separar electrones, en un haz, con una velocidad muy bien definida.

EJERCICIO V.7. Repita el análisis anterior para el caso de una partícula cargada que se mueve en un campo electromagnético tal que $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ y $E > B$. Describa cualitativamente el movimiento de la partícula.

V.3.4 Campo magnético no uniforme

Otro tipo de problema importante surge cuando el campo eléctrico o el magnético no son uniformes en todo el espacio. En el caso general, el movimiento de una partícula puede ser muy complicado y una solución analítica, aun aproximada, no es posible. A continuación vamos a considerar únicamente un problema típico.

Vimos anteriormente que una partícula cargada en presencia de un campo magnético uniforme se mueve girando alrededor de las líneas de campo magnético. Veamos ahora qué efecto produce el hecho de que el campo $\mathbf{B}$ no sea estrictamente uniforme, sino que varíe ligeramente en una dirección perpendicular a $\mathbf{B}$. Si escogemos adecuadamente el sistema de coordenadas, tenemos

$$\mathbf{B} = (0, 0, B(x)).$$

Debido a que no hay campo eléctrico, la energía cinética de la partícula se conserva. Por otra parte, si la variación de $\mathbf{B}$ con la distancia es pequeña, podemos poner

$$B(x) = B_0(1 + \alpha x),$$

donde $\alpha = B'(0)/B(0)$. Esta aproximación es válida siempre y cuando el radio de giro R_0 de la partícula (correspondiente a un campo magnético B_0) sea mucho menor que la distancia característica α^{-1} sobre la que varía el campo.

En resumen, la ecuación de Lorentz (V.7) toma la forma particular

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= \omega v_y(1 + \alpha x) \\ \dot{v}_y &= -\omega v_x(1 + \alpha x) \\ \dot{v}_z &= 0, \end{aligned} \tag{V.48}$$

donde $\omega = eB_0/mc\gamma$.

Evidentemente, v_z es constante; además, como la energía $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ también es constante, la magnitud de la velocidad v^2 es constante, así como $v_\perp$, que

es la magnitud de la velocidad en el plano perpendicular a **B**. En consecuencia, podemos poner

$$\begin{aligned} v_x &= v_\perp \cos\Phi \\ v_y &= -v_\perp \operatorname{sen}\Phi \end{aligned} \tag{V.49}$$

donde Φ es una función del tiempo. Sustituyendo en la ecuación (V.48) obtenemos:

$$\dot{\Phi} = \omega(1 + \alpha x). \tag{V.50}$$

Resolveremos esta ecuación en forma aproximada, usando técnicas sencillas de teoría de perturbaciones. En el límite de campo uniforme, $\alpha = 0$, esta última ecuación tiene una solución no perturbada

$$\Phi_0 = \omega t,$$

que corresponde a la trayectoria

$$x_0 = R_0 \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$y_0 = R_0 \cos(\omega t)$$

que ya estudiamos en la página 97. Para $\alpha^{-1} \gg R_0$, podemos sustituir x por x_0 en la ecuación (V.50):

$$\dot{\Phi} = \omega + \alpha\omega R_0 \cos(\omega t), \tag{V.51}$$

lo cual es válido si se desprecian términos de orden $(\alpha R_0)^2$. La solución de (V.51) es

$$\Phi = \omega t - \alpha R_0 \operatorname{sen}(\omega t)$$

y, por lo tanto, de acuerdo con las ecuaciones (V.49), la velocidad de la partícula viene dada en primera aproximación por

$$\begin{aligned} v_x &= v_\perp[\operatorname{sen}(\omega t) + \alpha R_0 \operatorname{sen}(\omega t)\cos(\omega t)] \\ v_y &= v_\perp[\cos(\omega t) - \alpha R_0 \cos^2(\omega t)], \end{aligned} \tag{V.52}$$

donde hemos despreciado términos de orden $(\alpha R_0)^2$ y utilizado el hecho de que $\operatorname{sen}(a + \epsilon) \approx \operatorname{sen} a + \epsilon \cos a$ y $\cos(a + \epsilon) = \cos\alpha - \epsilon \operatorname{sen} a$ para $\epsilon \ll 1$.

En la aproximación de orden cero, la partícula simplemente gira alrededor del campo magnético, dando una vuelta completa en un tiempo $2\pi/\omega$. Para interpretar en forma clara y simple las ecuaciones (V.52), válidas a primer orden, vamos a promediarlas sobre un ciclo completo. Para ello recordemos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\, d\varphi = 0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2},$$

por lo que el promedio de $\text{sen}(\omega t)\cos(\omega t)$ es cero, y el de $\cos^2(\omega t)$ es 1/2, además de que el promedio de $\text{sen}(\omega t)$ o $\cos(\omega t)$ es nulo. En consecuencia, las ecuaciones (V.52) implican que la velocidad promedio de la partícula es

$$\langle v_x \rangle = 0$$
$$\langle v_y \rangle = -\tfrac{1}{2}\alpha v_\perp R_0 = -\tfrac{1}{2}\alpha\omega R_0^2.$$

Si recordamos que escogimos el campo magnético en la dirección z y su gradiente en la dirección x, podemos concluir que, en general, una partícula cargada en un campo magnético paralelo pero ligeramente inhomogéneo adquiere una *velocidad de deriva* promedio

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{2}\frac{e}{m\gamma}\mathbf{B} \times (\nabla|\mathbf{B}|).$$

Nótese que esta velocidad sí depende del signo de la carga. Un campo magnético inhomogéneo separa cargas positivas de negativas; esta propiedad es muy importante en el estudio de plasmas.

V.3.5 Movimiento en un campo coulombiano

Por último, vamos a considerar el problema de una partícula cargada que se mueve en el campo eléctrico de otra carga. Si suponemos que la segunda carga es muchísimo más masiva que la primera y que, por lo tanto, se encuentra fija en el origen de coordenadas, su campo eléctrico estará dado por la ley de Coulomb

$$\mathbf{E} = \frac{e'}{r^2}\mathbf{e}_r,$$

donde e' es la carga de la partícula en reposo, r la distancia a esa carga y $\mathbf{e}_r$ el vector unitario en la dirección radial.

El campo de Coulomb es una solución exacta de las ecuaciones de Maxwell y, por lo tanto, también es válida en relatividad. Sólo hay que recordar que es el campo electromagnético de una carga vista en el sistema de referencia en el que esa carga se encuentra en reposo.

En la mecánica clásica, el problema del movimiento bajo la acción de una fuerza radial e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia es bien conocido. Se sabe que las partículas se mueven en elipses, parábolas o hipérbolas. En la mecánica relativista, la solución es un poco más complicada, como veremos a continuación.

Las ecuaciones de movimiento, (V.35) y (V.36), se reducen en este caso a

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{ee'\mathcal{E}}{mc^2r^2}\,\mathbf{e}_r \tag{V.53}$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = \frac{ee'}{mr^2}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_r, \tag{V.54}$$

donde e es la carga de la partícula que se mueve y $\mathbf{e}_r$ el vector unitario en la dirección r. Además, recordemos que

$$\mathbf{p} = m\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}. \tag{V.55}$$

En primer lugar, notemos que la derivada del momento angular $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$ con respecto del tiempo τ se anula debido a las ecuaciones (V.53) y (V.55). En consecuencia, tal como en la mecánica clásica, el movimiento se efectúa en un plano. Sin perder generalidad, podemos suponer que ése es el plano x, y, y debido a la simetría del problema, utilizamos coordenadas polares r, φ definidas por

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\varphi. \end{aligned} \tag{V.56}$$

En esta clase de problemas es conveniente definir vectores unitarios cuyas componentes en coordenadas cartesianas están dadas por

$$\mathbf{e}_r = (\cos\varphi, \mathrm{sen}\,\varphi) \qquad \mathbf{e}_\varphi = (-\,\mathrm{sen}\,\varphi, \cos\varphi), \tag{V.57}$$

como puede verse en la figura V.2.

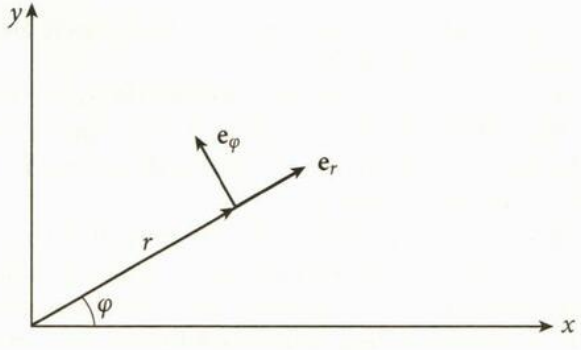


FIGURA V.2

Estos vectores unitarios no son constantes, ya que cambian de dirección en cada punto del plano x, y. Es fácil ver de las ecuaciones (V.57) que

$$d\mathbf{e}_r = d\varphi \mathbf{e}_\varphi \qquad d\mathbf{e}_\varphi = -d\varphi \mathbf{e}_r. \tag{V.58}$$

Por lo tanto, tenemos que el momento $\mathbf{p}$ está dado por

$$\mathbf{p} = m\frac{d}{d\tau}(r\mathbf{e}_r) = m\frac{dr}{d\tau}\mathbf{e}_r + mr\frac{d\varphi}{d\tau}\mathbf{e}_\varphi. \tag{V.59}$$

Derivando esta última ecuación y sustituyendo en (V.53), obtenemos

$$m\left[\frac{d^2r}{d\tau^2} - r\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2\right]\mathbf{e}_r + m\left[\frac{dr}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{d}{d\tau}\left(r\frac{d\varphi}{d\tau}\right)\right]\mathbf{e}_\varphi = \frac{ee'}{mc^2r^2}\mathcal{E}\mathbf{e}_r. \tag{V.60}$$

De aquí, comparando componentes, se deduce, primero, que

$$\frac{d}{d\tau}\left(r^2\frac{d\varphi}{d\tau}\right) = 0,$$

de donde

$$r^2\frac{d\varphi}{d\tau} = l, \tag{V.61}$$

con l una constante que identificamos como el momento angular por unidad de masa. Por lo tanto, el momento de la partícula es, de acuerdo con la ecuación (V.59),

$$\mathbf{p} = m\frac{dr}{d\tau}\mathbf{e}_r + \frac{ml}{r}\mathbf{e}_r \tag{V.62}$$

y su magnitud

$$p^2 = m\left[\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{l^2}{r^2}\right]. \tag{V.63}$$

Por otra parte, la ecuación (V.54) se reduce a

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = \frac{ee'}{r^2}\frac{dr}{d\tau},$$

que se integra inmediatamente dando

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_\infty - \frac{ee'}{r}, \tag{V.64}$$

donde $\mathcal{E}_\infty$, es la energía que posee la partícula muy lejos de la carga e'. (Vamos a suponer que la partícula no está amarrada a la carga e', lo que, en la mecánica clásica, correspondería a movimiento parabólico o hiperbólico.)

Volviendo a la ecuación (V.60) y utilizando (V.61) y (V.64) obtenemos

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = \left[1 - \left(\frac{ee'}{lmc}\right)^2\right]\frac{l^2}{r^3} + \frac{\mathcal{E}_\infty}{mc^2}\frac{ee'}{r^2}. \tag{V.65}$$

Esta ecuación es muy similar a la que se obtiene en mecánica clásica: el primer término en el lado derecho es la fuerza centrífuga y el segundo es la fuerza de Coulomb. La diferencia esencial es que, en relatividad, la fuerza centrífuga resulta ser atractiva si el factor

$$\alpha^2 \equiv 1 - \left(\frac{ee'}{lmc}\right)^2 \tag{V.66}$$

es negativo, lo cual sucede para valores de $ee'/mc^2 > l$.

Si multiplicamos (V.65) por $dr/d\tau$, podemos integrar una vez para obtener

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = -\frac{\alpha^2 l^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{E}_\infty}{mc^2}\frac{ee'}{r} + \frac{1}{2}(\gamma v_\infty)^2 \tag{V.67}$$

EJERCICIO V.8. Demuestre, por sustitución directa, que la solución de la ecuación (V.67), en el caso $\alpha^2 > 0$, es

$$\frac{(mcl\alpha)^2}{r} = \left[(ee')^2 + \left(\frac{\mathcal{E}_0^2}{c^2} - m^2c^2\right)l^2\right]^{1/2}\cos(\alpha\varphi) - \mathcal{E}_\infty ee', \tag{V.68}$$

que, en el caso no relativista $\alpha = 1$ se reduce a una hipérbola.

EJERCICIO V.9. Encuentre la solución análoga a la ecuación (V.68) para el caso $\alpha^2 < 0$. Demuestre que, en este caso, si $ee' < 0$ (lo cual corresponde a dos cargas de signo contrario y, por lo tanto, a una fuerza atractiva), la partícula puede caer sobre la carga e' (es decir, llegar a $r = 0$). Este caso no tiene análogo no relativista; en mecánica clásica, una carga puntual no puede capturar a otra carga puntual.[3]

[3]Para un átomo hidrogenoide (un solo electrón alrededor de un núcleo con carga Ze), el caso relativista se manifestaría para $Z > 137$.

V.3.6 Partícula en el campo de una onda plana

Por último vamos a estudiar el caso muy importante del movimiento de una partícula cargada en el campo de una onda electromagnética. En aras de la sencillez, tomaremos la onda como plana. Si escogemos la dirección de propagación en la dirección del eje z, una onda electromagnética con *polarización lineal* toma la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (F, 0, 0) \\ \mathbf{B} &= (0, F, 0), \end{aligned} \tag{V.69}$$

donde F es cierta función de $(t - z/c)$ que describe la forma de la onda. En particular, se suele escoger $F(t - z/c) = E_0 \cos[\omega(t - z/c)]$, lo cual describe una onda sinusoidal de amplitud E_0. Las ecuaciones de movimiento correspondientes a la componente z de la posición y la energía $\mathcal{E}$ de la partícula cargada, tienen la forma

$$\begin{aligned} \frac{dp_z}{dt} &= \frac{e}{c} F v_x \\ \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= eF v_x. \end{aligned} \tag{V.70}$$

Restando estas dos ecuaciones una de otra, llegamos a la importante conclusión de que $d(\mathcal{E} - cp_z)/dt = 0$, lo cual nos permite identificar una constante de movimiento:

$$\mathcal{E} - cp_z = \alpha mc^2, \tag{V.71}$$

siendo α una constante adimensional $\alpha = \gamma_0(1 - v_{0z}/c)$, donde γ_0 y v_{0z} son los valores iniciales de γ y v_z. En particular, tomando en cuenta que $\mathcal{E} = mc^2 dt/d\tau$ y $p_z = m\, dz/d\tau$, resulta que

$$t - z/c = \alpha\tau, \tag{V.72}$$

lo cual nos permite reescribir las ecuaciones de movimiento en términos del tiempo propio τ en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{d\tau} &= eE_0 \cos(\alpha\omega\tau) \\ \frac{dp_y}{d\tau} &= 0 \\ \frac{dp_z}{d\tau} &= \frac{eE_0}{mc} p_x \cos(\alpha\omega\tau). \end{aligned} \tag{V.73}$$

Nótese que no hay fuerza en la dirección y, es decir, en la dirección del campo magnético. Las ecuaciones anteriores se pueden integrar fácilmente; en particular, si suponemos, por sencillez, que la partícula está inicialmente en reposo en el origen (y, por lo tanto, $\alpha = 1$), resulta

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{eE_0}{\omega}\,\mathrm{sen}(\omega\tau) \\ p_y &= 0 \\ p_z &= \frac{1}{2mc}\left(\frac{eE_0}{\omega}\right)\mathrm{sen}^2(\omega\tau). \end{aligned} \tag{V.74}$$

El movimiento de la partícula está restringido al plano xz formado por la dirección del campo eléctrico y la dirección de propagación de la onda plana. Integrando una vez más las ecuaciones anteriores (recordando que $\mathbf{p} = m d\mathbf{r}/d\tau$) llegamos al resultado

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \frac{eE}{m\omega^2}[1 - \cos(\omega\tau)] \\ y(\tau) &= 0 \\ z(\tau) &= \frac{1}{c}\left(\frac{eE_0}{2m\omega}\right)^2\left[\tau - \frac{1}{2\omega}\,\mathrm{sen}(2\omega\tau)\right]. \end{aligned} \tag{V.75}$$

De aquí vemos que la partícula gira en el plano xz, pero, a la vez, es empujada en la dirección de propagación de la onda (el eje z) con una velocidad que es constante en promedio.

EJERCICIO V.10. Calcule la velocidad promedio que adquiere la partícula cargada en la dirección de propagación de la onda electromagnética.

Para el caso de una onda plana *circularmente polarizada*, se puede tomar

$$\begin{aligned} \mathrm{E} &= E_0(\cos[\omega(t - z/c)], -\mathrm{sen}[\omega(t - z/c)], 0) \\ \mathrm{B} &= E_0(\mathrm{sen}[\omega(t - z/c)], \cos[\omega(t - z/c)], 0). \end{aligned} \tag{V.76}$$

EJERCICIO V.11. Escriba las ecuaciones de movimiento para una partícula cargada en el campo de la onda circularmente polarizada descrita anteriormente. Compruebe que la condición (V.71) se sigue cumpliendo. Demuestre que una solución particular corresponde a un movimiento circular uniforme en el plano z = constante con radio $eE_0/m\omega^2\gamma$ y frecuencia ω en el sistema de laboratorio. Calcule el momento angular que adquiere la partícula en este caso.

V.4 Campo electromagnético de cargas en movimiento

V.4.1 Carga en movimiento uniforme

Una carga eléctrica en movimiento genera un campo magnético. El caso más simple de este importante fenómeno es el de una carga en movimiento uniforme. A continuación vamos a calcular el campo electromagnético producido por una partícula con carga e y que posee una velocidad constante v_0.

Este problema se simplifica enormemente si nos colocamos en el sistema inercial en el que la carga está en reposo y luego regresamos al sistema en el que la misma se ve en movimiento. Sin perder generalidad, tomemos el eje x a lo largo de la velocidad y sea el sistema S' aquel en el que una carga q está en reposo. Entonces, de acuerdo con la ley de Coulomb, tenemos en S'

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \frac{q}{r'^3}(x', y', z') \\ \mathbf{B}' &= 0, \end{aligned} \tag{V.77}$$

donde

$$r' = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}. \tag{V.78}$$

Podemos pasar ahora a un sistema S en el cual la partícula se ve en movimiento con velocidad v a lo largo del eje x. Para ello utilizaremos las fórmulas (V.30) para la transformación del campo electromagnético:

$$\begin{aligned} E_x = E'_x &= \frac{qx'}{r'^3} & 0 &= B_x \\ E_y = \gamma E'_y &= \gamma \frac{qy'}{r'^3} & 0 &= B_y + \frac{V}{c} E_z \\ E_z = \gamma E_z &= \gamma \frac{qz'}{r'^3} & 0 &= B_z - \frac{V}{c} E_y. \end{aligned} \tag{V.79}$$

Supongamos que la carga pasa por el origen $x = 0$ en el tiempo $t = 0$. En aras de la sencillez vamos a calcular el campo electromagnético en S únicamente en dicho tiempo $t = 0$. Las transformaciones de Lorentz se reducen a $x' = \gamma x$, $y' = y$, $z' = z$, por lo que

$$r'^2 = \gamma^2 x^2 + y^2 + z^2 = \gamma^2 r^2 - (\gamma^2 - 1)(y^2 + z^2) = \gamma^2 r^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \operatorname{sen}^2 \theta\right),$$

donde θ es el ángulo entre el vector $\mathbf{r}$ y el eje x, es decir,

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{r}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{E} = \frac{q\gamma}{r'^3}(x, y, z) \qquad \begin{aligned} B_x &= 0 \\ B_y &= -\frac{V}{c}E_z \\ B_z &= \frac{V}{c}E_y. \end{aligned} \tag{V.80}$$

En resumen, tenemos de estas ecuaciones que, en forma general,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{1}{c}\mathbf{V} \times \mathbf{E} \\ \mathbf{E} &= \frac{q\mathbf{r}}{\gamma^2 r^3[1 - (v^2/c^2)\,\mathrm{sen}^2\,\theta]^{3/2}} \end{aligned} \tag{V.81}$$

para el campo electromagnético de una carga que está pasando por el origen $\mathbf{r} = 0$ con velocidad $\mathbf{V}$.

La intensidad del campo eléctrico se deforma: las líneas de campo se contraen a lo largo de la dirección del movimiento de la carga. Esto se puede ver claramente si consideramos la intensidad del campo eléctrico a lo largo de la dirección de movimiento $\theta = 0$ y perpendicular a esa dirección ($\theta = \pi/2$). En la dirección de movimiento, el campo eléctrico se contrae por un factor γ^2, mientras que en la dirección perpendicular se expande por un factor γ.

Este efecto fue descubierto por Lorentz con base en sus transformaciones, antes de que apareciera la teoría de la relatividad de Einstein. Lorentz propuso que una partícula cargada se contrae a lo largo de la dirección de su velocidad, con lo cual desarrolló una teoría del electrón. Por supuesto, esta teoría se volvió obsoleta con la aparición de la relatividad especial, pero sirvió de inspiración para Einstein.

V.4.2 El campo de una corriente eléctrica

Como siguiente ejercicio, vamos a calcular el campo electromagnético de una corriente eléctrica que circula por un alambre de largo infinito. Una corriente consta de dos elementos: los electrones (negativos) que se mueven por el alambre, y los iones (positivos) fijos en él. En el sistema en reposo de los iones, la carga neta del alambre es nula.

Lo más conveniente es calcular por separado los campos producidos por las dos componentes y luego sumarlos, como si fueran dos alambres cargados, uno en reposo y otro en movimiento. Consideremos, pues, un alambre cargado, de largo infinito, que se mueve con cierta velocidad v. Como en el problema anterior, vamos a colocarnos en el sistema de referencia S' en el cual el alambre está en reposo, y luego pasar a S.

Debido a la simetría axial, podemos calcular el campo en un punto P en el plano xy únicamente (supondremos que el alambre fijo se extiende a lo largo del eje x). El campo en cualquier punto del espacio se puede obtener simplemente girando alrededor del alambre.

Si σ_0 es la carga por unidad de longitud en el sistema S' (véase la figura V.3), entonces el campo eléctrico es perpendicular al alambre y su magnitud es

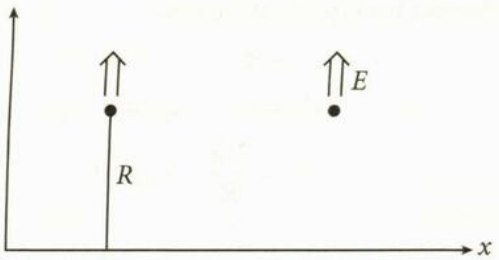


FIGURA V.3

$$E' = \frac{2\sigma_0}{R}, \tag{V.82}$$

donde R es la distancia al eje x. (Esta fórmula se puede obtener fácilmente utilizando la ley de Gauss: considérese un cilindro de radio R y altura L que rodea simétricamente al alambre. El cilindro contiene una carga $\sigma_0 L$ y el flujo de campo eléctrico sobre su superficie es $2\pi RLE'$. Este flujo dividido por 4π es igual a la carga contenida.) En consecuencia, en el punto P del plano xy, y visto en S', se tiene

$$\begin{aligned} E'_x &= 0 & B'_x &= 0 \\ E'_y &= \frac{2\sigma_0}{R} & B'_y &= 0 \\ E'_z &= 0 & B'_z &= 0. \end{aligned} \tag{V.83}$$

Ahora, podemos pasar al sistema S usando las ecuaciones (V.30). A partir de (V.83), resulta que, en el sistema S,

$$\begin{aligned} E_x &= 0 & B_x &= 0 \\ E_y &= \gamma\frac{2\sigma_0}{R} = \frac{2\sigma}{R} & B_y &= 0 \\ E_z &= 0 & B_z &= \gamma\frac{V}{c}\frac{2\sigma_0}{R} = \frac{2I}{cR}, \end{aligned} \tag{V.84}$$

donde hemos definido $\sigma = \gamma\sigma_0$ como la densidad de carga en S (recuerde la contracción de Lorentz), e $I = \gamma\sigma_0 V$ como la corriente.

Como señalamos anteriormente, una corriente real se compone de cargas positivas fijas (iones) y de cargas negativas que se mueven a lo largo del alambre. Para calcular el campo electromagnético de esa corriente, consideremos

un alambre *en reposo* en S con densidad de carga $\overline{\sigma_0}$. En analogía con las ecuaciones (V.83) y (V.30) se tiene

$$\begin{array}{cccc} \text{en } S: & & \text{en } S': & \\ E_x = 0 & B_x = 0 & E'_x = 0 & B'_x = 0 \\ E_y = \dfrac{2\overline{\sigma_0}}{R} & B_y = 0 & E'_y = \dfrac{2\gamma\overline{\sigma_0}}{R} & B'_y = 0 \\ E_z = 0 & B_z = 0 & E'_z = 0 & B'_z = \dfrac{2\bar{I}}{cR}, \end{array} \tag{V.85}$$

donde $\bar{I} = \gamma\overline{\sigma_0}V$. Ahora vamos a sobreponer el campo electromagnético dado por (V.83) y (V.84) al campo electromagnético dado por (V.85). Se tiene en S:

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= 2\frac{\sigma + \overline{\sigma_0}}{R} \\ E_z &= 0. \end{aligned}$$

Si queremos que *no* haya campo eléctrico en el sistema S, debemos poner

$$\overline{\sigma_0} + \sigma = 0.$$

Así, el campo electromagnético total (iones en reposo más electrones en movimiento) resulta ser, usando las fórmulas (V.83–V.85) y poniendo $\overline{\sigma_0} = -\sigma$:
En el sistema S de laboratorio:

$$\mathbf{E} = 0 \qquad \begin{aligned} B_x &= 0 \\ B_y &= 0 \\ B_z &= \frac{2I}{cR}, \end{aligned}$$

pero en el sistema S' de los iones:

$$\begin{aligned} E'_x &= 0 \\ E'_y &= \frac{2}{R}(\sigma_0 + \gamma\overline{\sigma_0}) \qquad & B'_x &= 0 \\ &= \frac{2(1-\gamma^2)\sigma_0}{R} & B'_y &= 0 \\ &= -\frac{2\sigma_0\gamma V^2}{c^2 R} & B'_z &= \frac{2\bar{I}}{cR} \\ E'_z &= 0 \end{aligned}$$

El resultado esencial es que, en el sistema S' en movimiento, la carga neta del alambre no se anula. Esto se debe a la contracción de Lorentz del sistema formado por los iones y es un efecto puramente relativista.

EJERCICIO V.12. Considere una corriente generada por electrones que se mueven con velocidad V en un alambre conductor. Considere una carga q que se mueve paralelamente a lo largo del alambre con la misma velocidad. Encuentre la forma explícita de la fuerza aplicada a q —es decir, $d\mathbf{p}/dt = e(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}/c)$— en los sistemas S (iones en reposo) y S' (electrones y carga q en reposo), y demuestre que es la misma. Dé una explicación física.

Este ejercicio es la solución a la paradoja descrita en la sección 1.2 (p. 17 y ss.). En el sistema de la carga que sigue a los electrones, la carga no resiente una fuerza debida al campo magnético, pero sí una fuerza eléctrica debida a la carga que adquiere el alambre.

VI. TENSORES DE ENERGÍA-MOMENTO

Las leyes de conservación desempeñan un papel fundamental en todas las ramas de la física. Son una poderosa herramienta matemática y, gracias a ellas, es posible describir el comportamiento de un sistema físico, tanto cualitativa como cuantitativamente.

En la mecánica newtoniana, las principales cantidades que se conservan son la masa, la energía, el momento lineal y el momento angular. En la teoría de la relatividad, las dos primeras no se conservan independientemente, pero sí la suma de las dos, si se toma en cuenta que la energía se puede transformar en masa y viceversa. En cuanto a los momentos lineal y angular, ya tuvimos ocasión de ver cómo se conservan, en los capítulos IV y V.

Hasta este punto hemos estudiado la dinámica de una o más partículas (capítulo IV), así como la del campo electromagnético (capítulo V). Ahora vamos a considerar un medio continuo, como un líquido o un gas.

Para describir un medio continuo es conveniente definir la densidad de masa, ρ. Por definición, la masa de un elemento diferencial de volumen dV del medio continuo es $\rho\, dV$. La ley de la conservación de la masa toma la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{VI.1}$$

que es la ecuación de continuidad. La interpretación de la ecuación (VI.1) es simple: considere un volumen V fijo; la masa que contiene es

$$M = \iiint \rho\, dV, \tag{VI.2}$$

donde la integración está tomada sobre el volumen V. Por otra parte, $\rho\mathbf{v}$ es el flujo de masa por unidad de tiempo, así que el flujo de masa es

$$F = \iint \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dA, \tag{VI.3}$$

donde la integración es sobre la superficie de V, $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal a la superficie y dA es el elemento diferencial de área. Si no hay fuentes o sumideros de masa en el volumen V, la conservación de masa implica

$$\frac{dM}{dt} = -F \tag{VI.4}$$

(el signo negativo viene de definir como positivo aquel flujo que *sale* del volumen). Utilizando el teorema de Gauss para transformar una integral de área en una de volumen, la ecuación (VI.4) toma la forma

$$\iiint \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0.$$

Como esta integral es válida para cualquier volumen V que se escoja, el integrando es cero y obtenemos la ecuación de continuidad (VI.1).

En general, por cada cantidad física conservada, se tiene una ecuación de continuidad del tipo

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{densidad de...}) + \nabla \cdot (\text{densidad de corriente de...}) = 0$$

La ecuación (VI.1) es un caso particular correspondiente a la conservación de masa. Otras cantidades conservadas son la energía y el momento. A continuación veremos cuáles son sus ecuaciones de conservación y cómo se generalizan al caso relativista. Para ello, primero presentamos un repaso de hidrodinámica clásica.

VI.1 Hidrodinámica

En hidrodinámica clásica, se define como *fluido perfecto* aquel en el cual no hay viscosidad ni conducción de calor. Las ecuaciones fundamentales que describen el movimiento de un fluido perfecto son, a saber:

CONSERVACIÓN DE MASA:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0\,; \tag{VI.5}$$

ECUACIÓN DE EULER:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{F}_{\text{ext}}, \tag{VI.6}$$

donde ρ = densidad, $\mathbf{v}$ = velocidad, p = presión, $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ = fuerza externa por unidad de volumen aplicada al fluido y

$$\frac{D}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

es el operador de derivada convectiva: es la variación de una cantidad vista

por un observador que se mueve con el fluido. Este último concepto se puede visualizar de la siguiente manera.

Sea F cualquier variable del fluido (presión, velocidad, temperatura, etc.). En el punto $\mathbf{r}$ y en el tiempo t, esa variable tiene el valor $F(\mathbf{r}, t)$. En el *mismo punto* $\mathbf{r}$ y un tiempo dt después, F vale $F(\mathbf{r}, t + dt)$; para dt infinitesimal, la diferencia está dada por

$$F(\mathbf{r}, t + dt) - F(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial F}{\partial t}\, dt,$$

que define la *derivada parcial*. En cambio, en un *punto que se mueve con el fluido*, F vale $F(\mathbf{r} + \mathbf{v}\, dt, t + dt)$ después de un tiempo dt, siendo $\mathbf{v}$ la velocidad del fluido en el punto considerado; la diferencia

$$F(\mathbf{r} + \mathbf{v}\, dt, t + dt) - F(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} F\right) dt,$$

define la derivada convectiva, que representa la variación de una cantidad hidrodinámica vista por un observador que se mueve con el fluido.

Como veremos más adelante, el concepto de derivada convectiva es muy útil en la física relativista. Por ahora, y adelantándonos un poco, señalaremos que esta derivada puede escribirse en forma totalmente covariante:

$$\frac{D}{dt} \equiv \gamma^{-1} c u^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \tag{VI.7}$$

ya que $u^{\mu} = \gamma(1, \mathbf{v}/c)$. La ecuación (VI.7) también puede ponerse como

$$\frac{D}{d\tau} = c u^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = c \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \tag{VI.8}$$

donde ahora τ es el tiempo propio en el sistema que se mueve con el fluido. Nótese que el operador $D/d\tau$ es un escalar frente a transformaciones de Lorentz.

Por definición, para un *fluido simple* existe una ecuación de estado que relaciona la presión con la temperatura, la densidad, o cualquier otra variable termodinámica, como, por ejemplo, la entropía. En general se tiene

$$p = p(\rho, T) \qquad \text{o} \qquad p(\rho, s) \qquad \text{o} \qquad p(s, T),$$

donde T = temperatura y s = entropía específica (por unidad de masa).

La primera ley de la termodinámica toma la forma

$$d\varepsilon = T\, ds - p d\left(\frac{1}{\rho}\right), \tag{VI.9}$$

donde ε es la energía interna por unidad de masa, es decir, aquella que se debe al movimiento microscópico de las moléculas.

Por definición, para un *fluido perfecto*, se tiene que

$$\frac{Ds}{dt} = 0, \tag{VI.10}$$

lo cual implica que no hay intercambio de calor entre diversas partes del fluido perfecto porque no hay fricción y el movimiento es reversible.

Una ecuación relacionada con la conservación del momento se puede obtener poniendo las ecuaciones (VI.5) y (VI.6) en notación tensorial. Definamos $v_a = (v_x, v_y, v_z) = \mathbf{v}$ y $x_a = (x, y, z) = \mathbf{r}$, donde los índices $a, b, n, \cdots = 1, 2, 3$.[1] Se tiene así:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_n)}{\partial x_n} = 0, \tag{VI.11}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_a}{\partial t} + v_n \frac{\partial v_a}{\partial x_n}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_a} + F_a^{\text{ext}}, \tag{VI.12}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Por otra parte, como

$$\frac{\partial(\rho v_a)}{\partial t} = \rho \frac{\partial v_a}{\partial t} + v_a \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

usamos (VI.11) y (VI.12) (con $\mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$) en esta última ecuación y resulta que

$$\frac{\partial(\rho v_a)}{\partial t} = -\rho v_n \frac{\partial v_a}{\partial x_n} - \frac{\partial p}{\partial x_a} - v_a \frac{\partial(\rho v_n)}{\partial x_n} = -\frac{\partial}{\partial x_n}(\rho v_a v_n + p\delta_{an}).$$

Definiendo

$$\Pi_{ab} = \rho v_a v_b + p\delta_{ab}, \tag{VI.13}$$

se obtiene finalmente

$$\frac{\partial(\rho v_a)}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_{ab}}{\partial x^b}. \tag{VI.14}$$

[1] En tres dimensiones, el equivalente del tensor de Minkowski es la delta de Kronecker δ_{ab}. Como ninguna componente cambia de signo al "subir" o "bajar" índices, es irrelevante si los índices de tensores en tres dimensiones se ponen arriba o abajo.

Π_{ab} es el llamado *tensor de esfuerzos* o de tensiones (inglés: *stress tensor*). Integrando la ecuación (VI.14) vemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho v_a \, dV = -\iiint \frac{\partial \Pi_{ab}}{\partial x^b}\, dV = -\iint \Pi_{ab} n^b \, dA.$$

El miembro izquierdo de esta ecuación es la variación de la componente a del impulso en el volumen V; entonces $\Pi_{ab} n_b \, dA$ es la componente a del flujo de impulso a través del elemento de área dA cuya normal es n_b. Por lo tanto, Π_{ab} es la componente b del flujo de componente a del impulso. Es un tensor de rango 2 (en tres dimensiones) y es simétrico.

VI.2 Tensor hidrodinámico relativista

Veamos cómo los resultados anteriores se generalizan a la relatividad especial.

Definamos un tensor de rango 2:

$$T^{\alpha\beta} = (e + p)u^\alpha u^\beta + p\eta^{\alpha\beta} \tag{VI.15}$$

donde e = densidad total de energía y masa, o sea, $e = \rho c^2 + \rho\varepsilon$, siendo ρ la densidad de masa propia y ε la energía interna (debida al movimiento de las partículas) por unidad de masa; p = presión; u^α = cuadrivector de velocidad de un elemento del fluido.

Las variables ρ, e, ε, p deben entenderse como funciones de la posición y el tiempo medidos en un punto por un *observador que se mueve con el fluido*. El observador ve el fluido a su alrededor en reposo (por lo menos en una región suficientemente pequeña), así que todas las mediciones que haga serán válidas para un fluido en reposo. De esta forma garantizamos que las variables termodinámicas sean *escalares* por definición y, por lo tanto, que $T^{\alpha\beta}$ sea un tensor.

Nótese que e incluye la masa y la energía juntas, y no por separado, ya que una se transforma en la otra en la teoría de la relatividad.

EJERCICIO VI.1. Recordando que $u^\alpha = (\gamma, \gamma\mathbf{v}/c)$ demuestre que, explícitamente,

$$T^{00} = (e + p)\gamma^2 - p \tag{VI.16a}$$

$$T^{0a} = (e + p)\gamma^2 \frac{v^a}{c} \tag{VI.16b}$$

$$T^{ab} = (e + p)\gamma^2 \frac{v^a v^b}{c^2} + p\delta^{ab} \tag{VI.16c}$$

Veamos cuál es el límite no relativista $(v/c) \ll 1$ de estas cantidades. En el límite no relativista, la densidad de masa ρ no depende del sistema de referencia y podemos tomar simplemente $e = \rho c^2$ en una primera aproximación. En consecuencia se tiene, en esa misma aproximación,

$$T^{00} = \rho c^2 \tag{VI.17a}$$

$$T^{0a} = \rho v^a c \tag{VI.17b}$$

$$T^{ab} = \rho v^a v^b + p\delta_{ab} = \Pi_{ab}. \tag{VI.17c}$$

Ahora podemos ver que la ecuación de conservación de masa (VI.11) implica que, en aproximación no relativista,

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0b}}{\partial x^b} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x^b}\rho v^b\right)c = 0. \tag{VI.18a}$$

Del mismo modo

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{a0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ab}}{\partial x^b} = 0, \tag{VI.18b}$$

debido a la ecuación (VI.14).

En resumen, las dos ecuaciones anteriores se pueden escribir en la forma

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0 \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3), \tag{VI.19}$$

que es válida en el límite no relativista. Pero como esta última ecuación *está escrita en forma totalmente covariante, es válida en general* debido al principio fundamental de la relatividad especial.

En general, un tensor de energía-momento es un tensor de rango 2, simétrico, que satisface la ecuación (VI.19) y cuyas componentes se pueden interpretar como

$$\begin{aligned} T^{00} &\rightarrow \text{densidad de energía} \\ T^{0a} &\rightarrow \text{densidad de flujo de energía y momento} \\ T^{ab} &\rightarrow \text{tensor de tensiones} \end{aligned} \tag{VI.20}$$

Mr Chi

En cada punto que se mueva con un fluido se puede encontrar un sistema de referencia en el cual, en ese punto, el fluido se ve en reposo y el tensor $T_{\mu\nu}$ toma la forma

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO VI.2. Es importante notar que la ρ que se usa en las ecuaciones no-relativistas (VI.1) a (VI.14) es la densidad de masa medida por un observador (fijo) en el laboratorio —llamémosla ρ_{lab}—, mientras que la ρ que aparece en $e = \rho c^2 + \rho\varepsilon$, etc., está medida en un sistema que se mueve con el fluido. Así, debido a la contracción de Lorentz del volumen, se tiene

$$\rho_{\mathrm{lab}} = \gamma\rho,$$

y, por lo tanto,

$$\rho = \rho_{\mathrm{lab}}\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx \rho_{\mathrm{lab}}(1 - v^2/2c^2). \tag{VI.21}$$

Tomando esto en cuenta, demuestre que

$$e = \rho c^2\left(1 + \frac{\varepsilon}{c^2}\right) \approx \rho_{\mathrm{lab}}c^2\left(1 - \frac{v}{2c^2} + \frac{\varepsilon}{c^2}\right),$$

de donde

$$\begin{aligned}(e + p)\gamma^2 &\approx \left[\rho_{\mathrm{lab}}c^2 + \rho_{\mathrm{lab}}\left(\varepsilon - \frac{v^2}{2}\right) + p\right]\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)\\ &\approx \rho_{\mathrm{lab}}c^2 + \rho_{\mathrm{lab}}\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) + p,\end{aligned} \tag{VI.22}$$

despreciando términos de orden v^2/c^2. Usando (VI.21) en las ecuaciones (VI.17) resulta

$$T^{00} = \rho_{\mathrm{lab}}c^2 + \rho_{\mathrm{lab}}\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) \tag{VI.23a}$$

$$T^{0a} = \rho_{\mathrm{lab}}v^a c + \rho_{\mathrm{lab}}\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right)\frac{v^a}{c} + p\frac{v^a}{c} \tag{VI.23b}$$

$$T^{ab} = \rho_{\mathrm{lab}}v^a v^b + p\delta_{ab} = \Pi_{ab}, \tag{VI.23c}$$

despreciando siempre términos en v^2/c^2. De aquí, demuestre que las ecuaciones de conservación implican que, en la siguiente aproximación relativista,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_{\mathrm{lab}}\frac{v^2}{2} + \rho_{\mathrm{lab}}\varepsilon\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\rho_{\mathrm{lab}}\left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho_{\mathrm{lab}}}\right)\mathbf{v}\right] = 0. \tag{VI.24}$$

Ésta es precisamente la ecuación de conservación de la energía para un fluido (véase, por ejemplo, L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Mecánica de fluidos*, §6).

VI.3 Termodinámica e Hidrodinámica relativista

La ecuación de conservación (VI.19), junto con la definición (VI.15) de $T^{\alpha\beta}$ contiene la primera ley de la termodinámica y la generalización relativista de la ecuación de Euler. Para comprobar esto, veamos los principios básicos de la *termodinámica relativista*.

En la física clásica, la masa se conserva y, por lo tanto, la densidad de masa es una variable fundamental para describir un fluido. Lo anterior, sin embargo, no es válido en la teoría de la relatividad porque la masa se puede transformar en energía y viceversa. En consecuencia, debemos utilizar alguna cantidad física que se conserve, aun cuando los efectos relativistas sean dominantes.

Tal cantidad conservada podría ser, aparentemente, el número de partículas elementales que constituyen a la materia. Pero esto no es del todo correcto porque las partículas se transforman unas en otras: el número de fotones no se conserva en muchas reacciones, los neutrones decaen en protones, etc. Pero lo que sí se conserva es el número de bariones.

Recordemos que los bariones son partículas elementales que interactúan entre sí por medio de las fuerzas nucleares y que, de acuerdo con las teorías más recientes, están constituidos por tres *cuarks*. El *protón* y el *neutrón* son los bariones más conocidos, aunque existen muchos más tipos. Un barión aislado decae muy rápidamente en uno más ligero, hasta acabar en un protón. Por ejemplo, un neutrón aislado decae espontáneamente en un protón, un electrón y un antineutrino (decaimiento beta); la vida media de un neutrón libre es de unos 890 segundos (pero los neutrones en un núcleo atómico pueden ser estables). El protón, a su vez, es totalmente estable pues no existe ningún barión más ligero, y una ley fundamental de la naturaleza es que *el número total de bariones (independientemente de su tipo) se conserva*.[2] Se entiende que el número bariónico de las antipartículas es negativo: por ejemplo, un protón y un antiprotón se aniquilan produciendo dos fotones (cero bariones).

Después de estas aclaraciones, veamos cómo podemos expresar la primera ley de la termodinámica en una forma compatible con la relatividad. Además de las variables descritas en la página 120 incluimos las siguientes cantidades físicas:

n = número de bariones por unidad de volumen

S = entropía por barión.

[2] Es un hecho empírico. Los experimentos más recientes ponen un límite inferior de 10^{32} años a la vida media del protón. En comparación, la edad actual del Universo según la teoría de la Gran Explosión es de unos 13.8×10^9 años.

Como indicamos anteriormente, se entiende que estas cantidades están medidas en un sistema que se mueve con la materia.

La relación entre la entropía por unidad de volumen, s, y la entropía por barión, S, es, evidentemente,

$$s = nS. \tag{VI.25}$$

Ahora, consideremos un volumen dado V, fijo, en el que se encuentran N bariones. La primera ley de la termodinámica estipula que

$$d(\text{energía en } V) = -p\,dV + T\,d(\text{entropía en } V). \tag{VI.26}$$

Pero $V = N/n$ y la entropía en V es $sV = SN$ y, por lo tanto,

$$d(eN/n) = -p\,d(N/n) + T\,ds(NS). \tag{VI.27}$$

Tomando en cuenta que N es constante, esta última ecuación se puede escribir como

$$de = \frac{p+e}{n}\,dn + nT\,dS, \tag{VI.28}$$

que es la versión relativista de la primera ley de la termodinámica (recuerde que e es la densidad de masa y energía). Como las variables que aparecen en esta última ecuación son escalares que se refieren al sistema que se mueve con el fluido, podemos también escribir la primera ley en términos de la derivada convectiva:

$$\frac{De}{d\tau} = \frac{p+e}{n}\frac{Dn}{d\tau} + nT\frac{DS}{d\tau}, \tag{VI.29}$$

que incluye sólo escalares.

Regresemos ahora a la conservación del número bariónico. Esto lo podemos expresar a través de la ecuación

$$\frac{\partial(nu^\mu)}{\partial x^\mu} = 0, \tag{VI.30}$$

que, en forma más explícita, equivale a

$$\frac{\partial(\gamma n)}{\partial t} + \nabla \cdot (\gamma n \mathbf{v}) = 0. \tag{VI.31}$$

Esta es justamente una ecuación de conservación como la que aparece en el caso clásico, ecuación (VI.1). Recuerde que n es la densidad de bariones en el sistema del fluido, y que, por lo tanto, γn es esa misma densidad en el sistema de laboratorio, tomando en cuenta la contracción de Lorentz del volumen.

La ecuación de conservación (VI.19) es, en realidad, un conjunto de cuatro ecuaciones (una para cada índice libre). Escribamos el tensor de energía-momento de un fluido perfecto en la forma

$$T^{\mu\nu} = \frac{e+p}{n} u^{\mu}(nu^{\nu}) + p\eta^{\mu\nu}. \tag{VI.32}$$

Tomando la derivada e igualando a cero, se obtiene

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = nu^{\nu}\left[u^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\frac{e+p}{n}\right) + \frac{e+p}{n}\frac{\partial u^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right] + n^{\mu\nu}\frac{\partial p}{\partial x^{\nu}} = 0, \tag{VI.33}$$

donde hemos tomado en cuenta la ecuación (VI.30). El siguiente paso es multiplicar esta ecuación por u_{μ} y recordar que $u_{\mu}u^{\mu} = -1$ y $u_{\mu}\partial u^{\mu}/\partial x^{\nu} = 0$. Se obtiene, con un poco de álgebra,

$$-u^{\mu}\frac{\partial e}{\partial x^{\mu}} + \frac{e+p}{n}u^{\mu}\frac{\partial n}{\partial x^{\mu}} = 0. \tag{VI.34}$$

Pero $u^{\mu}\partial/\partial x^{\mu} = D/d\tau$, así que esta última ecuación es justamente la primera ley de la termodinámica en la forma dada por la ecuación (VI.29).

Habiendo identificado una de las componentes de la ecuación de conservación (VI.33), veamos las otras tres. Para ello es conveniente definir un operador de proyección:

$$h^{\alpha}_{\beta} \equiv u^{\alpha}u_{\beta} + \delta^{\alpha}_{\beta}, \tag{VI.35}$$

que tiene la propiedad de que

$$h^{\alpha}_{\beta}u^{\beta} = 0, \tag{VI.36}$$

si u^{β} es un cuadrivector unitario $u_{\beta}u^{\beta} = -1$. En general, el operador h^{α}_{β} proyecta cualquier cuadrivector V^{β} a un espacio tridimensional cuya normal es u^{β} (figura VI.1). Se puede decir que h^{α}_{β} es un operador que anula la componente temporal de un cuadrivector. En efecto, $h^{\alpha}_{\beta}V^{\beta}$ sólo tiene componentes espaciales porque $u_{\alpha}(h^{\alpha}_{\beta}V^{\beta}) = 0$.

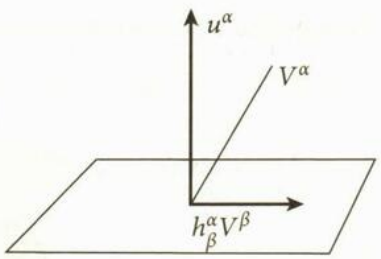


FIGURA VI.1

Volviendo a la ecuación (VI.33), si multiplicamos por h^{α}_{β}, obtenemos

$$(e+p)h^{\alpha}_{\beta}\frac{Du^{\beta}}{d\tau} + h^{\alpha\beta}\frac{\partial p}{\partial x^{\beta}} = 0, \tag{VI.37}$$

que es la ecuación de Euler relativista.

EJERCICIO VI.3. Escriba la ecuación de Euler relativista explícitamente en términos de la velocidad $\mathbf{v}$, usando el hecho de que $u^\alpha = \gamma(1, \mathbf{v}/c)$. Compruebe que, en el límite no relativista $v \ll c$, se recupera la ecuación clásica (VI.6).

EJERCICIO VI.4. Un fluido hipotético consta de partículas idénticas que se mueven todas con la misma velocidad en forma isotrópica (no hay una dirección preferencial). El tensor de energía-momento tiene la forma $T^{\alpha\beta} = K\langle u^\alpha u^\beta \rangle$, donde K es una cierta constante y el paréntesis $\langle\ \rangle$ representa un promedio. Demuestre que, debido a la isotropía, $\langle v^a v^b \rangle = (1/3)\mathbf{v}^2 \delta^{ab}$. Recordando que $u^\alpha = \gamma(1, v^a)$, demuestre que la densidad de energía e y la presión p satisfacen la relación $p = (\mathbf{v}^2/3c^2)e$. En el caso de un gas (¡realista!) de fotones, demuestre que la ecuación de estado es $p = (1/3)e$, la cual es válida, en general, para un gas ultrarrelativista ($v \approx c$ si las partículas son masivas).

VI.4 El tensor de energía-momento electromagnético

Después de haber elucidado el significado físico del tensor de energía-momento para un medio continuo, vamos a extender ese mismo concepto al campo electromagnético.

Consideremos primero un campo electromagnético en el vacío (es decir, en una región donde no hay cargas o corrientes). En vacío, las ecuaciones de Maxwell toman la forma

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial F^{*\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = 0. \tag{VI.38}$$

La segunda de estas ecuaciones puede escribirse en la forma

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial F_{\gamma\delta}}{\partial x^\alpha} = 0,$$

lo cual es equivalente a

$$\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} = 0. \tag{VI.39}$$

Nótese que los índices α, β y γ aparecen en orden cíclico.

Ahora, calculemos la derivada del escalar $F_{\lambda\mu}F^{\lambda\mu}$. Tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}(F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}) = F^{\lambda\mu}\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\beta} + F_{\lambda\mu}\frac{\partial F^{\lambda\mu}}{\partial x^\beta} = 2F^{\lambda\mu}\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\beta},$$

lo cual, utilizando la ecuación (VI.39), podemos escribir en la forma

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}(F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}) = -2F^{\lambda\mu}\left(\frac{\partial F_{\beta\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\mu\beta}}{\partial x^\lambda}\right). \tag{VI.40}$$

Si multiplicamos esto por $\eta^{\alpha\beta}$ y contraemos sobre los índices β, obtenemos[3]

$$\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}(F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}) = -2F^{\lambda\mu}\left(\frac{\partial F^\alpha_{\ .\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F^\alpha_{\mu.}}{\partial x^\lambda}\right). \tag{VI.41}$$

El siguiente paso consiste en usar el hecho de que $F_{\alpha\beta}$ es antisimétrico y reordenar los índices mudos. El primer y segundo términos en el lado derecho de la ecuación (VI.41) resultan ser iguales. El resultado final es

$$\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}(F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}) + 4F^{\lambda\beta}\frac{\partial F^\alpha_{\ .\lambda}}{\partial x^\beta} = 0, \tag{VI.42}$$

con un cambio de índices mudos (esta vez $\mu \to \beta$).

Después de esta gimnasia algebraica, definamos el tensor

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left[F^{\alpha\cdot}_{\ \mu}F^{\beta\mu} - \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\left(F_{\lambda\mu}F^{\lambda\mu}\right)\right], \tag{VI.43}$$

que es simétrico —basta ver que $F^{\alpha\cdot}_{\ \mu}F^{\beta\mu} = F^{\alpha\mu}F^{\beta\cdot}_{\ \mu}$—. La divergencia de este tensor es

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = \frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial F^{\alpha\cdot}_{\ \mu}}{\partial x^\beta}\right)F^{\beta\mu} + F^{\alpha\cdot}_{\ \mu}\frac{\partial F^{\beta\mu}}{\partial x^\beta} - \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(F_{\lambda\mu}F^{\lambda\mu}\right)\right].$$

El segundo término en el lado derecho es nulo debido a la ecuación de Maxwell (V.26), mientras que el primer y el tercer término son justamente la ecuación (VI.42) con un cambio apropiado de índices mudos. En resumen,

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0. \tag{VI.44}$$

$T^{\alpha\beta}$ definido por la fórmula (VI.43) es el *tensor de energía-momento del campo electromagnético.*

[3]Ponemos un punto en el lugar del índice que se subió o bajó, para recordar el lugar que tenía originalmente; es importante precisar la posición original de un índice cuando se trata de un tensor que no es simétrico.

EJERCICIO VI.5. Defina el vector de Poynting

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{B} \tag{VI.45}$$

y demuestre que las componentes de $T^{\alpha\beta}$ son

$$T^{00} = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \equiv W \tag{VI.46}$$

$$T^{0a} = \frac{1}{c}\mathbf{S} \tag{VI.47}$$

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi}\left[-E_aE_b - B_aB_b + \frac{1}{2}\delta_{ab}\left(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2\right)\right] \equiv \sigma_{ab}, \tag{VI.48}$$

donde W es la densidad de energía electromagnética, $\mathbf{S}$ es la densidad de flujo de energía y momento electromagnéticos, y σ_{ab} es el tensor de esfuerzos de Maxwell definido como

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{8\pi}\left(-E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 - B_x^2 + B_y^2 + B_z^2\right)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{4\pi}(-E_xE_y - B_xB_y)$$

etc.

EJERCICIO VI.6. Demuestre que la ecuación (VI.44) implica

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{S} = 0 \tag{VI.49}$$

$$\frac{\partial S_a}{\partial t} + c^2\frac{\partial \sigma_{an}}{\partial x^n} = 0 \tag{VI.50}$$

Una vez más, vemos que T_{00} corresponde a la densidad de energía, T_{0a} al flujo y T_{ab} es el tensor de esfuerzos. Las ecuaciones (VI.49) y (VI.50) son ecuaciones de conservación de energía y de momento, la forma general que ya habíamos visto anteriormente. Nótese también que la traza del tensor electromagnético $T^{\alpha\beta}$ es cero.[4]

[4]En general, la traza del tensor de energía-momento de un conjunto de partículas es proporcional a la masa individual de las partículas. El campo electromagnético se puede interpretar, a nivel cuántico, como un conjunto de fotones, que son "cuantos" de campo.

VI.5 Tensor de energía-momento electromagnético con materia

Veamos ahora qué pasa cuando hay cargas y corrientes. Sigamos definiendo el tensor electromagnético como

$$T^{\alpha\beta}_{(\text{e.m.})} = \frac{1}{4\pi}\left[F^{\alpha}_{\mu}\cdot F^{\beta\mu} - \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}\left(F_{\lambda\mu}F^{\lambda\mu}\right)\right], \tag{VI.51}$$

solo que ahora, debido a que $\partial F^{\alpha\beta}/\partial x^{\beta} = -4\pi J^{\alpha}/c$, se tiene, en lugar de la ecuación (VI.44),

$$\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}T^{\alpha\beta}_{(\text{e.m.})} = \frac{1}{c}F^{\alpha\mu}J_{\mu}. \tag{VI.52}$$

Hay que notar que $T^{\alpha\beta}_{(\text{e.m.})}$ representa sólo la contribución del campo electromagnético al tensor de energía-momento.

En el lado derecho de esta ecuación aparece un término que corresponde a la fuerza de Lorentz sobre las partículas cargadas, mismas que producen la corriente J^{α}. Para elucidar este último punto y tomar en cuenta la presencia de cargas, vamos a considerar el caso muy simple de un "gas" sin presión formado de partículas cargadas.

De acuerdo con lo que vimos al principio de este capítulo, el tensor de energía-momento que corresponde a la presencia de materia sin presión (energía interna $\varepsilon = 0$) es, según la ecuación (VI.15),

$$T^{\alpha\beta}_{(\text{mat})} = \mu c^2 u^{\alpha}u^{\beta}, \tag{VI.53}$$

donde μ es la densidad de *masa propia* (en esta sección, vamos a guardar el símbolo ρ para la densidad de *carga*).

Tomando la derivada de (VI.53):

$$\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}T^{\alpha\beta}_{(\text{mat})} = c^2\mu u^{\beta}\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + c^2 u^{\alpha}\frac{\partial(\mu u^{\beta})}{\partial x^{\beta}}.$$

Pero, según la ecuación de conservación de la masa,

$$\frac{\partial(\mu u^{\beta})}{\partial x^{\beta}} = 0,$$

así que

$$\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}T^{\alpha\beta}_{(\text{mat})} = c\mu\frac{du^{\alpha}}{d\tau}. \tag{VI.54}$$

Consideremos ahora la ecuación para la fuerza de Lorentz:

$$mc\frac{du^{\alpha}}{d\tau} = -eF^{\alpha\beta}u_{\beta}. \tag{VI.55}$$

Esta ecuación es válida para una partícula de masa m y carga eléctrica e. Si consideramos un conjunto de muchas partículas, podemos "promediarlas" para obtener, del lado izquierdo, la densidad de masa μ y u^{α} como la velocidad promedio del gas, y, del lado derecho, la densidad de corriente eléctrica. Así, la versión "promediada" de la ecuación para la fuerza de Lorentz es

$$\mu c\frac{du^{\alpha}}{d\tau} = -F^{\alpha\beta}J_{\beta}, \tag{VI.56}$$

que tiene una forma covariante, tal como debe ser.

Regresando a la ecuación (VI.54), se ve que

$$\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}T^{\alpha\beta}_{(\text{mat})} = -\frac{1}{c}F^{\alpha\beta}J_{\beta}. \tag{VI.57}$$

Sumando (VI.52) y (VI.57) se tiene finalmente que

$$\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(T^{\alpha\beta}_{(\text{e.m.})} + T^{\alpha\beta}_{(\text{mat})}\right) = 0, \tag{VI.58}$$

como era de esperarse. Así, vemos que el tensor de energía-momento total es la suma de los tensores del campo electromagnético y de la materia.

Si bien la situación física que hemos analizado es muy idealizada, ilustra el hecho de que la energía y el momento totales se conservan. La ecuación (VI.58) es válida siempre, pero $T^{\alpha\beta}_{(\text{mat})}$ puede tener una forma más general que la considerada aquí.

Existen otros tensores de energía-momento en relatividad; por ejemplo, para fluidos viscosos o para plasmas, pero no los consideraremos en este curso. Los básicos son los que presentamos aquí.

VII. CÁLCULO TENSORIAL

VII.1 Coordenadas generalizadas

Hasta este punto en el texto, hemos trabajado en coordenadas cartesianas, excepto en el problema de la página 106, en el que fueron utilizadas coordenadas polares. En muchos problemas de física, dependiendo de la simetría propia de cada caso, conviene utilizar coordenadas generalizadas que permitan simplificar las ecuaciones básicas. Así, por ejemplo, si se trata de estudiar el movimiento de partículas en campos con simetría axial, las coordenadas apropiadas serán las polares, y si la simetría es esférica, convendrá usar coordenadas esféricas.

En general, si se tiene un espacio de N dimensiones descrito con un conjunto de coordenadas cartesianas $\bar{x}^k$ (donde $k = 1, \ldots N$), se puede hacer una transformación a un sistema de coordenadas curvilíneas x^k definida por un conjunto de N ecuaciones:

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2 \ldots x^N) \quad i = 1 \ldots N. \tag{VII.1}$$

Por ejemplo, en 2 dimensiones las coordenadas polares $\{\rho, \phi\}$ se definen con las transformaciones

$$x = \rho \cos \phi$$
$$y = \rho \operatorname{sen} \phi,$$

y, en 3 dimensiones, las coordenadas esféricas $\{r, \theta, \phi\}$ están dadas por

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi$$
$$y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$$
$$z = r \cos \theta.$$

Para calcular el elemento diferencial de longitud en cualquier sistema de coordenadas, notemos que éste tiene la forma

$$ds^2 = \delta_{mn}\, d\bar{x}^m\, d\bar{x}^n$$

en un espacio con métrica euclidiana.[1]

[1] Por definición, un espacio euclidiano tiene todos los términos dx^2 en el elemento de longitud ds^2 con signo positivo. En cambio, en un espacio de Minkowski, $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu\, dx^\nu$

Tomando en cuenta que $d\bar{x}^i = (\partial \bar{x}^i/\partial x^n)\, dx^n$, resulta

$$ds^2 = \delta_{mn} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^i}\, dx^i \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^j}\, dx^j. \tag{VII.2}$$

Esta fórmula se puede reescribir en la forma

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j, \tag{VII.3}$$

donde se ha definido

$$g_{ij} = \delta_{mn} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^j}. \tag{VII.4}$$

La ecuación (VII.3) es la generalización del teorema de Pitágoras para distancias infinitesimales en cualquier sistema de coordenadas x^i; a la matriz *simétrica*[2] g_{ij} de $N \times N$ se le llama *tensor métrico*, por razones que se verán más adelante.

EJEMPLO 1. En coordenadas polares:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\phi^2. \tag{VII.5}$$

EJEMPLO 2. En coordenadas esféricas:

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta\, d\phi^2. \tag{VII.6}$$

EJERCICIO VII.1. Encontrar la forma del elemento de longitud en coordenadas elipsoidales prolatas (ξ, η, ϕ):

$$\begin{aligned} x &= a \operatorname{senh} \xi \operatorname{sen} \eta \cos \phi \\ y &= a \operatorname{senh} \xi \operatorname{sen} \eta \operatorname{sen} \phi \\ z &= a \cosh \xi \cos \eta, \end{aligned}$$

donde a es una constante.

En general, si se pasa de un sistema de coordenadas a otro, $x^k \to x'^k$, las diferenciales se transforman de acuerdo con la fórmula $dx^k \to dx'^k = (\partial x'^k/\partial x^n)\, dx^n$, que involucra a la matriz $\partial x'^k/\partial x^n$. Esta matriz de $N \times N$ se llama *matriz jacobiana*,[3] y su determinante es el *jacobiano* de la transformación. La condición para que una transformación de coordenadas tenga inversa es que su jacobiano no sea cero.

[2] Porque g_{ij} está definida por la ecuación (VII.3), donde aparece contraída con el producto $dx^i dx^j$ que es simétrico por construcción

[3] Por el matemático alemán Carl Jacobi (1804-1851).

Con la matriz jacobiana, se puede dar una definición general de vectores y tensores. Se define un *vector contravariante*, en N dimensiones, como el conjunto de N funciones A^k que, ante un cambio general de coordenadas $x^k \to x'^k$, se transforman tal como las componentes dx^k, es decir,

$$A^k \to A'^k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^n} A^n. \tag{VII.7}$$

Asimismo, tomando en cuenta que, debido a la regla de la cadena, las derivadas se transforman según la relación

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \to \frac{\partial}{\partial x'^k} = \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} \frac{\partial}{\partial x^n}, \tag{VII.8}$$

se define un *vector covariante* como un conjunto de N funciones A_k que, ante un cambio general de coordenadas, se transforman de acuerdo con la regla

$$A_k \to A'_k = \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} A_n. \tag{VII.9}$$

Vemos ahora que una transformación de Lorentz (utilizada en los capítulos anteriores) es sólo un caso particular de *transformaciones lineales* entre coordenadas cartesianas. Es evidente que la matriz de Lorentz Λ^{β}_{α}, definida al principio de este libro, es la matriz jacobiana de la transformación de Lorentz.

En este capítulo y los subsiguientes utilizaremos la definición más general de vector, dada por las ecuaciones (VII.7) y (VII.9), válida para cualquier transformación de coordenadas y no sólo una lineal. Asimismo, la definición de tensor se puede extender a esas mismas transformaciones generales; por ejemplo, un tensor de rango 2 covariante es un conjunto de $N \times N$ funciones T_{ab} que, ante un cambio general de coordenadas, se transforman de acuerdo con la regla

$$T_{ab} \to T'_{ab} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^a} \frac{\partial x^n}{\partial x'^b} T_{mn}. \tag{VII.10}$$

La generalización a otros rangos tiene una forma obvia.

En particular, de la ecuación (VII.4) se ve que g_{ab} se transforma justamente como un tensor covariante de rango 2; por ello se llama el *tensor métrico*. Este tensor es de fundamental importancia porque permite calcular la distancia entre dos puntos con la fórmula para ds^2. Además, permite subir y bajar índices por medio de las relaciones

$$A_i = g_{ij} A^j \qquad \text{y} \qquad A^i = g^{ij} A_j. \tag{VII.11}$$

Aquí se ha definido g^{ij} como el inverso de g_{ij}, es decir,

$$g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k. \tag{VII.12}$$

Asimismo, el producto escalar de dos vectores se puede escribir como

$$g_{ij}A^iB^j = A_iB^i,$$

con obvias generalizaciones.

VII.1.1 Derivada covariante

Una vez definido un tensor ante transformaciones generales de coordenadas, queda por aclarar si la diferencial o la derivada de un tensor sigue siendo un tensor. Veamos el caso simple de un vector contravariante: según la ecuación (VII.7), tomando la diferencial se obtiene

$$dA^k \to dA'^k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^n}dA^n + d\left(\frac{\partial x'^k}{\partial x^n}\right)A^n, \tag{VII.13}$$

de donde se ve claramente que, debido al segundo término, la diferencial dA^k *no* se transforma como un vector. La única excepción ocurre si se trata de una transformación lineal, caso en el cual ese segundo término sería nulo. Por ejemplo, las transformaciones de Lorentz son lineales, por lo que ese término sí es nulo y, en consecuencia, la diferencial de un tensor ante esas transformaciones sigue siendo un tensor si nos restringimos a coordenadas cartesianas.

Para transformaciones más generales de coordenadas, la naturaleza no-tensorial de la derivada se debe a que los ejes coordenados cambian de dirección de un punto a otro (excepto si se trata de coordenadas cartesianas). Consideremos un campo vectorial $A^k(x^n)$ definido en todo el espacio, lo cual quiere decir que en cada punto x^n se tiene asociado un vector A^k de acuerdo con cierta regla. Pasar de un punto x^n a otro punto $x^n + dx^n$ implica también un cambio de la orientación de los ejes coordenados, tal como se ve en la figura VII.1. Por lo tanto, para saber qué tanto cambia un vector A^k en el punto $x^n + dx^n$ con respecto al punto x^n, se deben comparar las componentes $A^k(x^n + dx^n)$ con las componentes que tendría el vector $A^k(x^n)$ al ser *transportado paralelamente* al punto $x^n + dx^n$. Ahora bien, debido a la variación de las coordenadas mismas de un punto a otro, las componentes de $A^k(x^n)$ transportadas paralelamente al punto $x^n + dx^n$ cambian por un término que tiene la forma

$$\delta A^k = -\Gamma^k_{mn}A^m\,dx^n, \tag{VII.14}$$

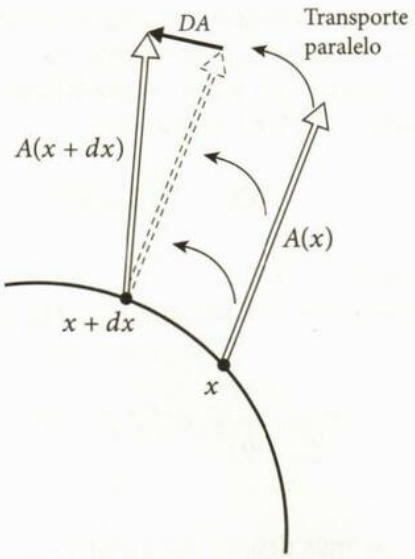


FIGURA VII.1

ya que, a primer orden en dx^n, el cambio debe ser proporcional tanto a la magnitud de A^k como a la distancia dx^n. Los coeficientes Γ^k_{mn} se llaman *símbolos de Christoffel*,[4] y su forma explícita será deducida un poco más adelante.

Ya con esta aclaración, se define el verdadero cambio entre $A^k(x^n)$ y $A^k(x^n + dx^n)$ como

$$DA^k = dA^k - \delta A^k = \left(\frac{\partial A^k}{\partial x^m} + \Gamma^k_{mn} A^m\right) dx^n, \qquad \text{(VII.15)}$$

el cual es, por definición, un vector covariante.

La notación usual para la derivada covariante es el punto-y-coma (;) y la coma simple (,) para la derivada común. Por ejemplo $\phi_{,a} = \partial\phi/\partial x^a$, y la *derivada covariante* de A^k es

$$A^k_{;j} = \frac{\partial A^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{mj} A^m, \qquad \text{(VII.16)}$$

que es un tensor de rango 2 ante transformaciones generales de coordenadas.

Si se trata de vectores covariantes, la derivada covariante es

$$A_{k;j} = \frac{\partial A_k}{\partial x^j} - \Gamma^m_{kj} A_m, \qquad \text{(VII.17)}$$

[4] Por Elwin Bruno Christoffel (1829-1900), matemático alemán.

lo cual se demuestra notando que el producto escalar de dos vectores, $A^n B_n$, es un escalar, es decir, no debe cambiar ante transformaciones de coordenadas. En consecuencia, al pasar de un punto a otro del espacio, se tiene $\delta(A^n B_n) = 0$, lo cual implica $A^n \delta B_n = -\delta A^n B_n$, por lo que

$$\delta B_n = \Gamma^m_{ns} B_m dx^s, \tag{VII.18}$$

y se llega así a la fórmula (VII.17).

La generalización a tensores de cualquier rango es clara. Por ejemplo,

$$T^k_{j;l} = \frac{\partial T^k_j}{\partial x^l} + \Gamma^k_{ml} T^m_j - \Gamma^m_{jl} T^k_m, \tag{VII.19}$$

etcétera.

Veamos ahora con más detalles las propiedades de los símbolos de Christoffel. Notemos primero que para un escalar ϕ, que tiene una sola componente y que es invariante ante una transformación de coordenadas, la derivada covariante debe ser la misma que la derivada simple; por lo tanto, $\phi_{,a}$, es un vector covariante. Asimismo, la derivada covariante de $\phi_{,a}$ es $\phi_{,a;b} = \phi_{,a,b} - \Gamma^n_{ab}\phi_{,n}$, de donde se tiene que

$$\phi_{,a;b} - \phi_{,b;a} = (\Gamma^n_{ba} - \Gamma^n_{ab})\phi_{,n}, \tag{VII.20}$$

tomando en cuenta que las derivadas comunes conmutan: $\phi_{,a,b} = \phi_{,b,a}$. Por otra parte, $\phi_{,a;b} - \phi_{,b;a}$ es un tensor dos veces covariante que, en coordenadas cartesianas, tendría todas sus componentes nulas porque no habría diferencia entre derivadas covariantes y derivadas parciales comunes. Pero entonces, debido a la regla de transformación de los tensores, $\phi_{,a;b} - \phi_{,b;a}$ también debe ser nulo en cualquier otro sistema de coordenadas. De la ecuación (VII.20) se deduce, pues, que los símbolos de Christoffel deben ser simétricos en sus dos índices inferiores:

$$\Gamma^n_{ba} = \Gamma^n_{ab}. \tag{VII.21}$$

Podemos encontrar ahora la forma explícita de los símbolos de Christoffel en términos del tensor métrico g_{ab}. Para ello notemos primero que si DA^a es un vector, también lo es $DA_a = g_{ab} DA^b$, lo cual implica $Dg_{ab} = 0$. Por lo tanto,

$$g_{ab;c} = g_{ab,c} - \Gamma^n_{ac} g_{nb} - \Gamma^n_{bc} g_{an} = 0. \tag{VII.22}$$

Es conveniente definir el símbolo de Christoffel con todos los índices abajo:

$$\Gamma_{ab,c} = g_{nc}\Gamma^{n}_{ab}, \tag{VII.23}$$

de donde resulta

$$g_{ab,c} = \Gamma_{ac,b} + \Gamma_{bc,a}\,. \tag{VII.24}$$

Permutemos cíclicamente los índices en esta última ecuación:

$$\begin{aligned} g_{bc,a} &= \Gamma_{ba,c} + \Gamma_{ca,b} \\ g_{ca,b} &= \Gamma_{cb,a} + \Gamma_{ab,c}\,, \end{aligned} \tag{VII.25}$$

y combinemos las tres últimas ecuaciones, tomando en cuenta que $\Gamma_{ab,c} = \Gamma_{ba,c}$; resulta la fórmula final

$$\Gamma_{ab,c} = \tfrac{1}{2}(g_{cb,a} + g_{ac,b} - g_{ab,c}), \tag{VII.26}$$

que permite calcular $\Gamma_{ab,c}$ explícitamente, así como $\Gamma^{c}_{ab} = g^{cn}\Gamma_{ab,n}$.

Es importante señalar que los símbolos de Christoffel *no* son tensores ante transformaciones generales de coordenadas.

EJERCICIO VII.2. Demuestre que, ante una transformación $x^k \to x'^k$,

$$\Gamma^{a}_{bc} \to \Gamma'^{a}_{bc} = \Gamma^{l}_{mn}\frac{\partial x'^{a}}{\partial x^{l}}\frac{\partial x^{m}}{\partial x'^{b}}\frac{\partial x^{n}}{\partial x'^{c}} + \frac{\partial^2 x^{l}}{\partial x'^{b}\partial x'^{c}}\frac{\partial x'^{a}}{\partial x^{l}}. \tag{VII.27}$$

De esta relación resulta evidente que Γ^{a}_{bc} no es un tensor.

Veamos a continuación algunas fórmulas útiles para derivar covariantemente vectores y tensores. Una relación importante involucra el determinante g del tensor métrico g_{ab}. Dado que g_{ab} es un tensor, se transforma de acuerdo con la fórmula (VII.10), por lo que $\sqrt{g}$ se transforma a su vez de acuerdo con

$$\sqrt{g} \to \sqrt{g'} = J(x^a, x'^b)\sqrt{g}, \tag{VII.28}$$

donde $J(x^a, x'^b)$ es el jacobiano de la transformación $x^a \to x'^a$. Por definición, $\sqrt{g}$ es un *seudoescalar*.[5]

[5] En general, un seudotensor de rango k se transforma como un tensor excepto por un factor adicional $J(x^a, x'^b)^k$.

Si se interpreta al tensor g_{ab} como una matriz cuadrada y a g^{ab} como su inversa, se puede utilizar una fórmula básica de álgebra lineal:

$$dg = gg^{ab}dg_{ab} = -gg_{ab}dg^{ab}, \tag{VII.29}$$

de donde resulta, a partir de la ecuación (VII.26), que el símbolo de Christoffel con dos índices contraídos se puede escribir como

$$\Gamma^n_{an} = \frac{1}{2}g^{mn}\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^a} = \frac{\partial \ln(\sqrt{g})}{\partial x^a}. \tag{VII.30}$$

Esta relación es muy útil para poner diversas fórmulas que involucran derivadas covariantes en formas que no implican tener que calcular los símbolos de Christoffel. Esto se deja como un ejercicio.

EJERCICIO VII.3. Utilizando la relación (VII.30), demuestre las siguientes fórmulas:

a) Laplaciano o d'alembertiano de un escalar Φ:

$$\Phi^{;n}_{,n} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^m}\left(\sqrt{g}\,g^{mn}\frac{\partial \Phi}{\partial x^n}\right)$$

b) Divergencia de un vector A^a:

$$A^n_{;n} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^n}\left(\sqrt{g}\,A^n\right)$$

c) Divergencia de un tensor antisimétrico $F^{ab} = -F^{ba}$:

$$F^{an}_{;n} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^n}\left(\sqrt{g}\,\frac{\partial F^{an}}{\partial x^n}\right)$$

Por último, calculemos el elemento de volumen en coordenadas curvilíneas. En un espacio de N dimensiones y en coordenadas cartesianas, el elemento de volumen es simplemente $dV^{(N)} = d\bar{x}^1\, d\bar{x}^2 \ldots d\bar{x}^N$, lo cual se puede escribir como $dV^{(N)} = \det[D^a_{\ b}]$, donde $[D^a_{\ b}]$ es una matriz[6] de $N \times N$ cuyo elemento $D^a_{\ b}$ es la componente b de la diferencial $d\bar{x}^a$. En consecuencia, en un nuevo sistema de coordenadas

$$dV^{(N)} = J(\bar{x}^a, x^b)\, d\bar{x}^1\, d\bar{x}^2 \ldots d\bar{x}^N,$$

[6] En general, el elemento de volumen es el determinante de la matriz formada por las componentes de cada vector diferencial perpendicular a las superficies x^N = constante.

donde J es el jacobiano de la transformación $\bar{x}^a \to x^a$. Por otra parte, recordando que g_{ab} se transforma según la ecuación (VII.10), se llega a la fórmula básica

$$dV^{(N)} = \sqrt{g}\, dx^1\, dx^2 \ldots dx^N. \tag{VII.31}$$

EJERCICIO VII.4. Demuestre que en coordenadas cilíndricas y esféricas los elementos de volumen son, respectivamente,

$$dV^{(3)} = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz \qquad \text{y} \qquad dV^{(3)} = r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

VII.2 Vectores base

Hasta aquí en este capítulo vimos las definiciones de tensores covariantes y contravariantes, y la forma de relacionarlos ("subir y bajar índices") por medio del tensor métrico g_{ab} y su inverso g^{ab}; por ejemplo, $A_a = g_{ab}A^b$. En la práctica resulta a veces más conveniente definir una base de vectores unitarios, $e_a^{(i)}$, o "eneada" en N dimensiones, donde tanto el índice de eneada, (i), como el de coordenada, a, van de 1 a N. Un vector o tensor se puede referir a esa base. La eneada cumple la condición de ortonormalidad

$$e_a^{(i)} e_b^{(j)} g^{ab} = \delta^{(ij)}, \tag{VII.32}$$

que equivale también a

$$e_a^{(i)} e_b^{(j)} \delta_{(ij)} = g_{ab}. \tag{VII.33}$$

Con lo anterior se puede expresar un vector A^a en términos de sus proyecciones sobre cada vector base:

$$e_a^{(i)} A^a = A^{(i)}, \tag{VII.34}$$

o, alternativamente,

$$A_a = A_{(i)} e_a^{(i)}. \tag{VII.35}$$

Nótese que los índices de base suben y bajan con la matriz $\delta_{(ij)}$. En el caso particular de que la métrica g_{ab} sea diagonal (es decir: $g_{ab} = 0$ si $a \neq b$), la condición anterior se reduce simplemente a

$$A_{(i)} = \sqrt{g_{ii}} A^i = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} A_i. \tag{VII.36}$$

Si se trata de un espacio de Minkowski, se puede escoger una tétrada $e_\alpha^{(i)}$, con $i = 0, 1, 2, 3$ que satisface las condiciones

$$e_\alpha^{(i)} e_\beta^{(j)} \eta_{(ij)} = \eta_{\alpha\beta}, \tag{VII.37}$$

donde se ha utilizado ahora la matriz $\eta_{(ij)}$ con la misma forma que la métrica de Minkowski, es decir $\eta_{(ij)} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

EJERCICIO VII.5. Demuestre que una posible base en coordenadas esféricas $\{r, \theta, \varphi\}$ es la tríada

$$e_a^{(r)} = (1, 0, 0), \qquad e_a^{(\theta)} = (0, r, 0), \qquad e_a^{(\varphi)} = (0, 0, r \operatorname{sen} \theta).$$

A partir de aquí, encuentre la relación entre las componentes contravariantes de un vector A^a y sus componentes "triadiales" $A^{(a)} = e_a^{(a)} A^a$, y demuestre la fórmula para la divergencia en coordenadas esféricas:

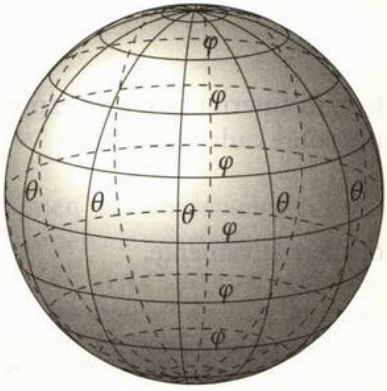
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A^{(r)}) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{sen} \theta A^{(\theta)}) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} A^{(\varphi)}.$$

VII.3 Espacios curvos

Imaginemos la superficie de una esfera. ¿Cómo medir distancias sobre ella? Tomemos el elemento de línea en coordenadas esféricas y pongamos la condición $r = R$, donde R es el radio (constante) de la esfera. La superficie de la esfera estará descrita por la métrica bidimensional:

$$dl^2 = R^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \, d\varphi^2). \tag{VII.38}$$

Esta expresión permite medir la longitud entre dos puntos cuyas coordenadas θ y φ están especificadas; por ejemplo, si se trata de la superficie terrestre, estas coordenadas son la longitud y la latitud (figura VII.2).



Mr Chi

FIGURA VII.2

Evidentemente, la métrica anterior no tiene la forma cartesiana. ¿Existe una transformación de coordenadas, en dos dimensiones, que nos permita

pasar a una métrica cartesiana? La respuesta es negativa por una razón que debe ser intuitiva: es imposible aplanar la superficie de una esfera sin distorsionarla y, por ende, sin alterar las distancias entre puntos (lo cual es un viejo problema de la cartografía). Si bien en una región suficientemente pequeña la superficie de la Tierra parece plana, no lo es a gran escala, porque se trata de una superficie genuinamente curva.

Para expresar lo anterior en una forma matemáticamente más rigurosa, basta notar que la distancia infinitesimal sobre una superficie bidimensional tiene la forma $dl^2 = g_{ab}\, dx^a\, dx^b$ (con $a, b = 1, 2$), y el tensor métrico g_{ab} posee, en general, tres componentes independientes g_{11}, g_{22} y g_{12}. "Aplanar" esta superficie equivale a encontrar una transformación de coordenadas $x^a \to \bar{x}^a$ tal que en el nuevo sistema la métrica tome la forma cartesiana $dl^2 = \delta_{ab}\, d\bar{x}^a\, d\bar{x}^b$. Pero esto implica encontrar *dos* funciones $\bar{x}^a = \bar{x}^a(x^b)$ que satisfagan las *tres* condiciones

$$g_{ab} = \delta_{mn} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^a} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^b}.$$

Como esto no es posible en general, se deduce que una superficie curva no se puede aplanar sin deformarla (salvo casos especiales como la superficie de un cilindro).[7]

Lo anterior sugiere la posibilidad de extender el concepto de espacio curvo a más de dos dimensiones. Definamos un espacio de N dimensiones como el conjunto de todos los "puntos" que se identifican, cada uno, con una colección de N números reales: $(x^1, x^2 \ldots x^N)$; y definamos además la distancia entre dos "puntos" por medio de una fórmula, ds^2, dada por las $N(N+1)$ componentes independientes de un tensor g_{ab}. De hecho, un espacio de N dimensiones está definido precisamente por su tensor g_{ab}. Lo esencial es que, en general, no es posible encontrar un conjunto de N funciones $\bar{x}^a = \bar{x}^a(x^1, x^2 \ldots x^N)$ que transformen las $N(N+1)$ componentes de g_{ab} en δ_{ab}; si no existe tal transformación, el espacio es curvo. Por ejemplo, en el caso de nuestro espacio-tiempo de cuatro dimensiones, podemos fijar las 10 componentes del tensor $g_{\alpha\beta}$, pero si no hay ninguna transformación de las 4 coordenadas que reduzca este tensor a la forma de Minkowski, $g_{\alpha\beta} \to \eta_{\alpha\beta}$, entonces el espacio-tiempo es curvo.

Veamos ahora qué sucede con el concepto de "línea recta" en un espacio curvo. Sobre una superficie intrínsecamente curva, como la de una esfera, se pueden trazar curvas y medir su longitud por medio de la fórmula fundamental para ds^2. Evidentemente no puede haber rectas sobre esa superficie, pero si sabemos cómo medir la longitud de una curva, es factible buscar aquella

[7] La superficie de un cilindro no es intrínsecamente curva porque admite coordenadas cartesianas $\{x, y\}$; sólo hay que identificar un punto x con otro $x + P$, donde P es el perímetro del cilindro

de mínima longitud que una entre sí dos puntos dados. A una curva con esa propiedad se le llama *geodésica,* y es la generalización de la "recta", que es la curva de mínima longitud entre dos puntos sobre una superficie plana.

Por ejemplo, sobre la superficie de una esfera, las geodésicas son círculos de diámetro máximo, como puede visualizarse fácilmente.

Se pueden encontrar geodésicas en un espacio curvo de cualquier número de dimensiones si se conoce la fórmula para medir distancias infinitesimales. La longitud de una curva cuya ecuación paramétrica es $x^a(\sigma)$ y que une dos puntos P_1 y P_2 es la integral de línea

$$s = \int_{P1}^{P2} ds = \int_{P1}^{P2} \sqrt{g_{ab}\dot{x}^a(\sigma)\dot{x}^b(\sigma)}\, d\sigma \tag{VII.39}$$

(el punto representa la derivada con respecto al parámetro σ). La geodésica es aquella curva que minimiza s. Pero el problema de minimizar una integral de línea es bien conocido en mecánica clásica; como vimos en el capítulo IV, éste es el problema de Euler-Lagrange. Encontrar una geodésica se reduce, pues, a resolver esas ecuaciones interpretando a la longitud s como una acción. En concreto,

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^a}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^a} = 0, \tag{VII.40}$$

donde $\mathcal{L} = \sqrt{g_{ab}\dot{x}^a(\sigma)\dot{x}^b(\sigma)}$ se puede interpretar formalmente como un lagrangiano.

Antes de deducir la forma explícita de estas ecuaciones, conviene redefinir un nuevo lagrangiano formal $\widetilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}^2$, lo cual permite simplificar los cálculos. En términos de $\widetilde{\mathcal{L}}$, es fácil ver que la ecuación (VII.40) toma la forma

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{x}^a}\right) - \frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial x^a} &= -\widetilde{\mathcal{L}}^{1/2}\frac{d}{d\sigma}\widetilde{\mathcal{L}}^{-1/2}\frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{x}^a} \\ &= \widetilde{\mathcal{L}}^{-1/2}\left(\frac{d^2 s}{d\sigma^2}\right)\frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{x}^a},\end{aligned} \tag{VII.41}$$

donde se ha tomado en cuenta que, por su misma definición, $\widetilde{\mathcal{L}}^{1/2} = ds/d\sigma$. De la ecuación anterior es evidente que si se toma como parámetro σ a la longitud misma s medida a lo largo de la curva, el término en el lado derecho de esa ecuación se anula. Con esta convención, se puede utilizar $\widetilde{\mathcal{L}}$ como lagrangiano, lo cual, como hemos dicho, simplifica los cálculos.

EJERCICIO VII.6. A partir del lagrangiano $\widetilde{\mathcal{L}} = g_{ab}\dot{x}^a(s)\dot{x}^b(s)$ y las ecuaciones correspondientes de Euler-Lagrange, demuestre que la ecuación de las geodésicas toma la forma

$$\frac{d^2x^a}{ds^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{ds}\frac{dx^c}{ds} = 0. \tag{VII.42}$$

Demuestre que esta ecuación equivale a

$$u^b u^a_{\ ;b} = 0, \tag{VII.43}$$

donde $u^a = dx^a/cd\tau$ es el cuadrivector unitario de velocidad. Interprete esta última relación.

VII.4 Geometría riemanniana

Vimos en la sección anterior que es posible definir un espacio curvo a partir de su tensor métrico g_{ab}. Más específicamente, se define un *espacio de Riemann*[8] como un espacio de N dimensiones que posee un tensor métrico g_{ab}, que permite calcular distancias entre puntos, y símbolos de Christoffel dados por la fórmula (VII.26), que permiten efectuar transportes paralelos y derivadas covariantes. Pero ¿cómo saber si un espacio con una métrica dada es realmente curvo? El tensor de Riemann, que introduciremos a continuación, permite determinar la curvatura.

Regresemos al concepto de derivada covariante. Sabemos que las derivadas simples conmutan, pero no hay razón para que esa propiedad se cumpla también para derivadas covariantes. De hecho, como se mostrará a continuación, la conmutación de las derivadas covariantes es el elemento esencial para determinar la curvatura de un espacio. Tomemos, pues, un vector covariante A^a; por construcción, tanto la primera derivada covariante,

$$A^a_{\ ;b} = A^a_{\ ,b} + \Gamma^a_{nb}A^n,$$

como la segunda,

$$A^a_{\ ;b;c} = (A^a_{\ ;b})_{,c} + \Gamma^a_{nb}A^n_{\ ;c} - \Gamma^n_{bc}A^a_{\ ;n}, \tag{VII.44}$$

son tensores de rango 2 y 3, respectivamente. Además, el conmutador

$$A^a_{\ ;b;c} - A^a_{\ ;c;b}$$

[8] G. F. Bernhard Riemann (1826-1866), importante matemático alemán, a quien se deben muchas contribuciones a las matemáticas, y en particular a la geometría moderna.

también es un tensor (de rango 3). Si ahora se intercambian índices bc en la ecuación (VII.44) y se restan las dos expresiones, se obtiene, con un poco de álgebra (recordando que las derivadas parciales sí conmutan),

$$A^a{}_{;bc} - A^a{}_{;cb} = -R^a{}_{dbc}A^d\,, \tag{VII.45}$$

donde se ha definido el *tensor de Riemann:*

$$R^a{}_{dbc} \equiv \Gamma^a_{dc,b} - \Gamma^a_{db,c} + \Gamma^a_{nb}\Gamma^n_{dc} - \Gamma^a_{nc}\Gamma^n_{db}\,. \tag{VII.46}$$

Se trata efectivamente de un tensor, ya que el miembro izquierdo de (VII.45) es un tensor de rango 3, por lo que el miembro derecho también debe serlo; y como A^d es un vector (de rango 1), $R^a{}_{dbc}$ debe ser un tensor de rango 4.

Ahora bien, recordemos que en un *espacio plano* siempre es posible pasar a un sistema de coordenadas cartesianas en el que las derivadas covariantes se vuelven derivadas parciales y, por lo tanto, conmutan entre sí. Esto implica que todas las componente de $R^a{}_{bcd}$ son cero en coordenadas cartesianas. Pero, siendo $R^a{}_{bcd}$ un tensor, también se anularán todas sus componentes en cualquier otro sistema de coordenadas debido a las reglas de transformación de los tensores. Lo contrario también se puede demostrar (pero queda fuera del alcance de este texto): $R^a{}_{bcd} = 0$ implica que el espacio es plano. Así, se llega al teorema fundamental de la geometría riemanniana:

> *Un espacio es plano en una región dada si y sólo si todas las componentes del tensor de Riemann son cero en esa región.*

Recuérdese que en una vecindad suficientemente pequeña de un punto, el espacio puede tomarse como aproximadamente plano, aun si el espacio es globalmente curvo. Esta propiedad de un espacio riemanniano se puede expresar más precisamente de la siguiente forma:

En un punto dado de un espacio riemanniano (es decir, localmente) existe siempre una transformación de coordenadas que permite poner g_{ab} en forma cartesiana y anular los símbolos de Christoffel (que contienen primeras derivadas de g_{ab}), pero *no* se pueden anular todas las componentes del tensor de Riemann (que contiene segundas derivadas de g_{ab}).

Dicho de otro modo, en todo punto se puede encontrar un sistema de coordenadas en el que, localmente, las primeras derivadas de g_{ab} son nulas, pero no, en general, las segundas derivadas o las de orden superior.

VII.4.1 Algunas propiedades del tensor de Riemann

En esta sección presentaremos algunas fórmulas útiles relacionadas con el tensor de Riemann. Para empezar, conviene definir el tensor con todos los índices covariantes:

$$R_{abcd} = g_{an}R^{n}_{\ bcd}. \tag{VII.47}$$

Usando la forma explícita de los coeficientes de Christoffel, dada por la ecuación (VII.26), se llega a la fórmula

$$\begin{aligned} R_{abcd} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ad}}{\partial x^b \partial x^c} + \frac{\partial^2 g_{bc}}{\partial x^a \partial x^d} - \frac{\partial^2 g_{ac}}{\partial x^b \partial x^d} - \frac{\partial^2 g_{bd}}{\partial x^a \partial x^c}\right) \\ + g_{mn}\left(\Gamma^m_{bc}\Gamma^n_{ad} - \Gamma^m_{bd}\Gamma^n_{ac}\right). \end{aligned} \tag{VII.48}$$

De esta fórmula se deducen directamente las siguientes propiedades de simetría del tensor de Riemann:

$$\begin{aligned} R_{abcd} &= -R_{bacd} \\ R_{abcd} &= -R_{abdc} \\ R_{abcd} &= R_{cdab} \\ R_{abcd} + R_{adbc} + R_{acdb} &= 0. \end{aligned} \tag{VII.49}$$

A partir de las condiciones impuestas por estas ecuaciones, se puede demostrar que el número de componentes linealmente independientes del tensor de Riemann es $N^2(N^2-1)/12$ si el espacio tiene N dimensiones.[9] En 2 dimensiones (una superficie curva), este tensor tiene una sola componente linealmente independiente; en este caso se define

$$R_{abcd} = K(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}), \tag{VII.50}$$

donde K es un escalar llamado *curvatura gaussiana*.[10] En 3 dimensiones, el tensor de Riemann tiene 6 componentes linealmente independientes, y en 4 dimensiones son 20 sus componentes.

EJERCICIO VII.7. Encontrar el valor de la curvatura gaussiana K para

a) la superficie de una esfera con métrica $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$,

b) la variedad de 2 dimensiones con métrica $ds^2 = d\chi^2 + \sinh^2\chi\, d\varphi^2$.

[9] La forma de demostrarlo consiste en interpretar a R_{abcd} como una matriz simétrica de $N' \times N'$, donde $N' = N(N-1)/2$ es el número de pares de índices antisimétricos.

[10] Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), distinguido matemático alemán que contribuyó a muy diversas ramas de las matemáticas.

A partir de la relación (VII.48) se obtienen las llamadas *identidades de Bianchi*,[11] que relacionan entre sí las derivadas del tensor de Riemann:

$$R^{a}_{bcd;e} + R^{a}_{bec;d} + R^{a}_{bde;c} = 0. \qquad \text{(VII.51)}$$

También, a partir del tensor de Riemann, se suele definir el tensor de Ricci:[12,13]

$$R_{ab} \equiv R^{n}_{anb}, \qquad \text{(VII.52)}$$

que satisface la condición de simetría $R_{ab} = R_{ba}$, así como el *escalar de Ricci*:

$$R \equiv g^{ab} R_{ab}. \qquad \text{(VII.53)}$$

En 4 dimensiones, por ejemplo, el tensor de Ricci posee 10 componentes linealmente independientes.

Las identidades de Bianchi (VII.51) permiten demostrar una fórmula de fundamental importancia en relatividad general, como se verá en el capítulo siguiente. En la expresión (VII.51) se contraen los índices a con c, y, usando la definición (VII.52), se tiene

$$R_{bd;e} - R_{be;d} + R^{n}_{bde;n} = 0;$$

contrayendo una vez más sobre los índices bd y tomando en cuenta las relaciones (VII.49), se llega a la expresión

$$\left(R^{b}_{a} - \frac{1}{2}\delta^{b}_{a} R\right)_{;b} = 0. \qquad \text{(VII.54)}$$

Es decir, la divergencia del tensor $R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R$ es cero.

[11] Luigi Bianchi (1856-1928), matemático italiano.

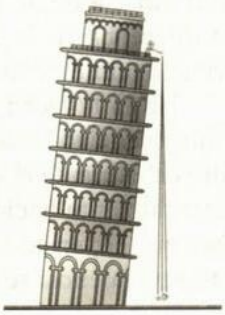
[12] Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925), matemático italiano.

[13] A veces se define $R_{ab} = R^{n}_{abn}$, que difiere de nuestra definición en un signo.

VIII. LA TEORÍA DE LA GRAVITACIÓN DE EINSTEIN

VIII.1 El principio de equivalencia

Vimos en los capítulos anteriores dedicados a la relatividad especial que, de acuerdo con el postulado fundamental de esta teoría, todas las leyes de la física son covariantes frente a las transformaciones de Lorentz de un sistema inercial a otro. Pero ¿qué pasa en sistemas no inerciales? Einstein encontró la respuesta recurriendo a la equivalencia formal que existe entre un sistema acelerado y un campo gravitacional.



La ley fundamental de la naturaleza en la que se basó Einstein se conoce como PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA. Según este principio, existe una completa equivalencia entre MASA INERCIAL y MASA GRAVITACIONAL, la cual se manifiesta por el hecho empírico de que, en un campo gravitacional, todos los cuerpos caen con la misma aceleración (recuérdese el famoso experimento que supuestamente realizó Galileo en la torre de Pisa). En nuestra vida cotidiana nos hemos acostumbrado a tomar este principio como algo evidente, pero, en realidad, no tiene ninguna explicación obvia porque relaciona dos propiedades de la materia que, en principio, no deberían tener ninguna conexión entre sí. Esta dos propiedades son, por una parte, la inercia —que aparece en la segunda ley de Newton y es una resistencia a cambiar el estado de movimiento— y, por otra parte, la fuerza de gravedad —una de las fuerzas fundamentales de la naturaleza—.

La diferencia entre masa inercial y gravitacional se puede poner de manifiesto comparando la gravedad con otras fuerzas de la naturaleza, como, por ejemplo, la electricidad. La fuerza sobre una partícula de masa *inercial* m_{in} y carga eléctrica q está dada, de acuerdo con la segunda ley de Newton y la ley de Coulomb, por la fórmula

$$\text{Fuerza} = m_{\text{in}}a = \frac{Qq}{r^2},$$

donde Q es la carga del cuerpo que produce el campo. Así, la aceleración de una carga de prueba q es

$$a = \left(\frac{q}{m_{\text{in}}}\right)\frac{Q}{r^2}$$

y depende de la razón q/m_{in}. El punto esencial es que no existe ninguna relación entre la carga eléctrica y la masa inercial de la partícula, por lo que la aceleración puede tomar cualquier valor, incluso cero si la partícula no tiene ninguna carga eléctrica.

En cambio, si se trata de la gravedad, el equivalente de la carga es la llamada "masa gravitacional", m_{grav}, que aparece en la ley de Newton para la gravedad:

$$\text{Fuerza} = m_{\text{in}}a = \frac{M_{\text{grav}}m_{\text{grav}}}{r^2},$$

donde M_{grav} es la masa gravitacional del cuerpo que produce el campo. En realidad, m_{grav} es una "carga gravitacional", pero lo extraño es que es siempre proporcional a la masa inercial, razón por la cual todos los cuerpos caen con la misma aceleración. Tan es así que masa inercial y gravitacional se toman como estrictamente *iguales* sin que resulte ninguna contradicción: $m_{\text{in}} = m_{\text{grav}}$. A diferencia de lo que sucede con la electricidad, es imposible "descargar" gravitacionalmente un cuerpo sin quitarle también su masa inercial.

Hasta la fecha, no hay ninguna explicación convincente del principio de equivalencia.[1] Isaac Newton, cuando descubrió la gravitación universal, entendió cabalmente el significado de este principio y él mismo lo confirmó experimentalmente haciendo oscilar péndulos de diversos materiales para comprobar que el periodo es el mismo para todos ellos. En la actualidad, el principio de equivalencia se ha verificado con una precisión de hasta una parte en 10^{12}.

VIII.2 Gravedad y curvatura

Debido a que todos los cuerpos caen con la misma aceleración, un observador que está en caída libre no puede notar ninguna fuerza de gravedad. Este hecho le dio la clave a Einstein para relacionar sistemas no inerciales con la gravedad. Einstein propuso el siguiente experimento mental: una persona parada en la Tierra en un elevador en reposo siente una aceleración g hacia abajo; pero si el mismo elevador está en caída libre, todo en él cae con la misma aceleración y aparentemente desaparece el campo gravitacional. Del mismo modo, una persona en una nave espacial que se está acelerando siente una fuerza hacia un lado de su vehículo, por lo que puede pensar que está en el campo gravitacional de algún planeta (figura VIII.1).

[1] En el siglo XIX, Ernst Mach propuso que la inercia de un cuerpo se debe a la atracción gravitacional de todos los demás cuerpos en el Universo, lo cual podría ser la clave para explicar la relación entre gravedad e inercia. La idea es interesante, pero los experimentos no parecen confirmarla.

FIGURA VIII.1

Estos experimentos mentales muestran que es imposible deducir la presencia de un campo gravitacional a partir del movimiento de *una* única partícula. Sin embargo, la situación es distinta si se tienen *dos* partículas: debido a los efectos de marea, dos partículas en caída libre tienden a acercarse a medida que se aproximan al centro de la Tierra, tal como se ve en la figura VIII.2. A partir de estas consideraciones, Einstein notó que la situación recuerda el movimiento a lo largo de geodésicas sobre una superficie curva (figura VIII.3): en una región suficientemente pequeña, una partícula se mueve casi en línea recta, pero si se continua lo suficiente el movimiento a lo largo de dos geodésicas, empieza a manifestarse la curvatura. Por ejemplo, la curvatura de la superficie terrestre sólo se manifiesta sobre escalas grandes.

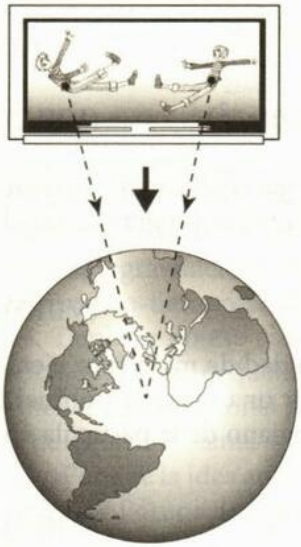


FIGURA VIII.2

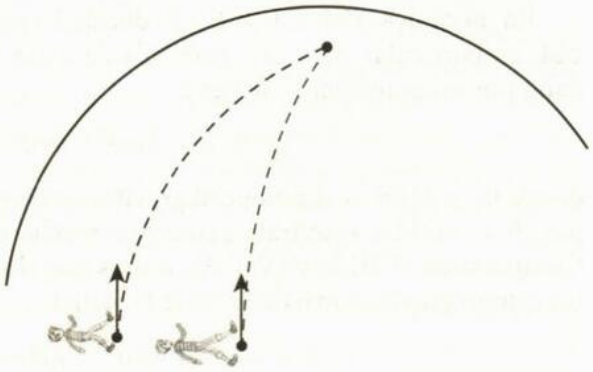


FIGURA VIII.3

Sobre la base de esta analogía geométrica, Einstein propuso los siguientes

POSTULADOS FUNDAMENTALES DE LA RELATIVIDAD GENERAL

1° El espacio-tiempo físico es un espacio de Riemann de 4 dimensiones, definido por una métrica $ds^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$ (con $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$), cuya curvatura se debe al campo gravitacional. Cada punto de este espacio admite un espacio tangente que es el espacio-tiempo de Minkowski, y se reduce a ese espacio-tiempo en ausencia de gravedad. Una partícula en caída libre se mueve a lo largo de una geodésica de ese espacio riemanniano (la trayectoria de la luz, en particular, es una geodésica de largo nulo, $ds^2 = 0$).

2° *Todas* las leyes físicas son covariantes frente a transformaciones generales de coordenadas en el espacio-tiempo riemanniano asociado a un campo gravitacional.

En la teoría de la relatividad general, la geometría se vuelve dinámica: la gravedad curva el espacio-tiempo y la trayectoria de una partícula es equivalente a una curva geodésica.

Para ver la relación entre geodésicas y trayectorias físicas, regresemos al problema de la mínima acción que estudiamos en el capítulo IV. Vimos que la acción de una partícula libre, en ausencia de cualquier fuerza, está dada por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}\,dt, \tag{VIII.1}$$

lo cual implica que el lagrangiano es

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} = -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + 0(c^{-2}). \tag{VIII.2}$$

En mecánica clásica, $L = T - V$, donde T es la energía cinética y V la potencial. En particular, para una partícula de masa m en un campo gravitacional dado por un potencial V, se tiene

$$L = \tfrac{1}{2}mv^2 - m\Phi, \tag{VIII.3}$$

donde $\Phi = V/m$ es el potencial gravitacional por unidad de masa (por ejemplo, $\Phi = -GM/r$ si se trata del campo producido por una masa M puntual). Comparando (VIII.2) y (VIII.3), vemos que el lagrangiano de la partícula en un campo gravitacional debe tener la forma

$$L = -mc^2 + \tfrac{1}{2}mv^2 - m\Phi + 0(c^{-2}) \tag{VIII.4}$$

en la aproximación $v/c \ll 1$. La acción S se vuelve, por lo tanto,

$$S = -mc^2 \int \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} + \frac{\Phi}{c^2}\right) dt, \qquad \text{(VIII.5)}$$

despreciando términos del orden de $(v/c)^4$ o superiores. La partícula en el campo gravitacional seguirá una trayectoria tal que S sea mínima. *Pero esto es equivalente a pedir que la trayectoria sea una geodésica en un espacio-tiempo cuyo elemento de longitud es*

$$ds = \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} + \frac{\Phi}{c^2}\right) c\, dt,$$

o, lo que es lo mismo,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2\, dt^2,$$

siempre despreciando términos del orden de $(v/c)^4$. Tomando en cuenta que $v^2 = (d\mathbf{r}/dt)^2$, llegamos a la conclusión de que la métrica del espacio-tiempo en cuestión es

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2\, dt^2 + d\mathbf{r}^2 + 0(v^2/c^2), \qquad \text{(VIII.6)}$$

y el tensor métrico tiene la forma

$$\begin{aligned} g_{00} &= -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) + 0(c^{-4}) \\ g_{0a} &= 0(c^{-2}) \qquad\qquad a, b = 1, 2, 3 \\ g_{ab} &= \delta_{ab} + 0(c^{-2}). \end{aligned} \qquad \text{(VIII.7)}$$

En suma, encontrar trayectorias de mínima acción en un campo gravitacional es formalmente equivalente a encontrar geodésicas en un espacio riemanniano de cuatro dimensiones descrito por la métrica (VIII.6). Nótese, en particular, que dicha métrica se reduce a la del espacio de Minkowski cuando el campo gravitacional está ausente, lo cual es de esperarse, pues la curvatura del espacio-tiempo se debe exclusivamente a la presencia de masas gravitantes. También nótese que en la aproximación utilizada se ha supuesto que las velocidades son pequeñas con respecto a la de la luz, $v \ll c$, y que, además, el potencial gravitacional por unidad de masa, Φ, es tal que $\Phi \ll c^2$; a esta última condición se le llama aproximación de campo débil.

¿Por qué la idea anterior no se aplica a otros campos, como el eléctrico, por ejemplo? Porque, incluso en el caso más simple de un campo coulombiano, el potencial es $V = -Qq/r$ y, en consecuencia, el potencial por unidad de masa es $\Phi = -(q/m)(Q/r)$. Debido a que no hay un principio de equivalencia entre la

carga eléctrica y la masa inercial, el cociente q/m puede tomar cualquier valor y, por lo tanto, resulta imposible definir un espacio-tiempo curvo *único* para el campo de la carga Q; más bien, habría que utilizar espacio-tiempos distintos para cada carga de prueba, según el valor de q/m. En cambio, si se trata de un campo gravitacional, el principio de equivalencia garantiza que se puede asociar unívocamente un espacio-tiempo curvo a un mismo campo.

Volvamos al espacio-tiempo curvo definido por la ecuación (VIII.6). Recordemos que en relatividad especial se define el tiempo propio de una partícula como un escalar construido a partir de la seudolongitud de su línea de universo: $d\tau = \sqrt{-ds^2}/c$; el tiempo físico medido por un reloj es éste, y no t, que es sólo una coordenada. Evidentemente, esta definición de tiempo propio se puede extender a espacios curvos, ya que la seudodistancia ds^2 sigue siendo un escalar, independientemente del sistema de coordenadas que se use. En particular, para una partícula en reposo en algún punto $\mathbf{r}$ = constante en un campo gravitacional, se tiene $d\mathbf{r} = 0$ y, por lo tanto, su tiempo propio está dado por

$$\begin{aligned} d\tau &= \left(1 + 2\Phi/c^2\right)^{1/2} dt \\ &\approx \left(1 + \Phi/c^2\right) dt. \end{aligned} \tag{VIII.8}$$

Esta ecuación implica que el *tiempo trascurre más lentamente en presencia de un campo gravitacional*, en comparación con el tiempo medido por un observador lejano para el cual no hay gravedad, ya que Φ es negativo y de mayor magnitud cerca de un cuerpo gravitante (por ejemplo, $\Phi = -GM/r$).

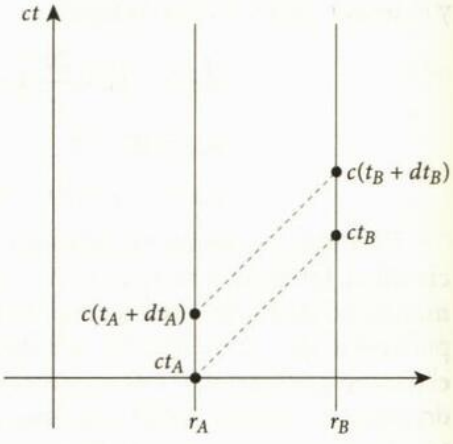


FIGURA VIII.4

Más específicamente, consideremos un espacio-tiempo estático (es decir, no hay movimiento y el campo gravitacional no cambia con el tiempo) en el que se encuentran dos partículas, A y B, fijas en r_A y r_B respectivamente. Sus líneas de universo son como se muestra en la figura VIII.4. Si A emite un primer rayo de luz en el tiempo t_A y un segundo rayo en el tiempo $t_A + dt_A$, B los recibe en los tiempos t_B y $t_B + dt_B$ respectivamente. El tiempo propio medido por A entre las dos emisiones es

$$d\tau_A = \left(1 + \frac{1}{c^2}\Phi(r_A)\right) dt_A$$

y el tiempo propio medido por B entre las recepciones correspondientes es

$$d\tau_B = \left(1 + \frac{1}{c^2}\Phi(r_B)\right) dt_B.$$

Dado que el espacio-tiempo es estático, la trayectoria de los fotones tiene la misma forma independientemente del tiempo de emisión, así que $dt_A = dt_B$ y, por lo tanto,

$$\frac{d\tau_B}{d\tau_A} = \frac{1 + \Phi(r_B)/c^2}{1 + \Phi(r_A)/c^2},$$

o bien, despreciando términos del orden de Φ/c^2,

$$d\tau_B = \left[1 + \frac{\Phi(r_B) - \Phi(r_A)}{c^2}\right] d\tau_A. \tag{VIII.9}$$

EJERCICIO VIII.1. Use la ecuación (VIII.9) para calcular cuánto adelanta *a)* un reloj en la Tierra con respecto a uno en la superficie del Sol; *b)* un reloj colocado a una altura de 10 m con respecto a uno en el suelo.

VIII.3 Las ecuaciones de Einstein

Acabamos de mostrar que un campo gravitacional con potencial por unidad de masa Φ se puede relacionar, en una primera aproximación, con un espacio riemanniano cuyo tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ está dado por las ecuaciones (VIII.7). Esta forma del tensor es válida para $\Phi \ll c^2$ y se reduce a la métrica de Minkowski, $\eta_{\alpha\beta}$, en ausencia de masas que deformen el espacio-tiempo.[2] Por otra parte, recordemos que en mecánica newtoniana una distribución dada de masa produce un potencial gravitacional Φ determinado por medio de la *ecuación de Poisson*:[3]

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \tag{VIII.10}$$

donde $\rho = \rho(\mathbf{r})$ es la densidad de masa. En la teoría de Einstein, en cambio, el campo gravitacional está descrito, no por un escalar Φ, sino por el tensor métrico $g_{\alpha\beta}$. Además, la masa y la energía no son independientes en relatividad, y la

[2] De aquí en adelante consideraremos espacio-tiempos de 4 dimensiones, por lo que nos restringiremos a nuestra anterior notación de letras griegas para los índices que van de 0 a 3.

[3] Denis Poisson (1781-1840), matemático francés cuyos trabajos influyeron posteriormente en Riemann.

distribución de masa-energía está descrita por el tensor de energía-momento $T_{\alpha\beta}$ y no por una única función ρ. Esto, junto con el principio de covariancia, llevaron a Einstein a proponer una generalización de la ecuación de Poisson (VIII.10) en la forma

$$G_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}, \tag{VIII.11}$$

donde $G_{\alpha\beta}$ debe ser un tensor construido con $g_{\alpha\beta}$ y sus derivadas hasta segundo orden, en analogía con la ecuación de Poisson, que contiene segundas derivadas de Φ; en cuanto al lado derecho de esta ecuación, $T_{\alpha\beta}$ debe ser el tensor de energía-momento, con κ una constante de proporcionalidad por determinarse. La relación anterior implica que el tensor $G_{\alpha\beta}$ tiene que satisfacer las mismas propiedades que $T_{\alpha\beta}$, es decir,

i) $G_{\alpha\beta}$ es simétrico porque $T_{\alpha\beta}$ lo es.

ii) $G^{\alpha\beta}_{\ \ ;\beta} = 0$ porque $T^{\alpha\beta}_{\ \ ;\beta} = 0$.

Por último, la ecuación (VIII.11) se tiene que reducir a la ecuación de Poisson (VIII.10) en el límite newtoniano.

Justamente el tensor de Ricci contiene derivadas hasta de segundo orden de $g_{\alpha\beta}$ y es simétrico. Además, como se vio en el capítulo anterior, la combinación

$$R_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta} R$$

tiene divergencia cero. Estas propiedades condujeron a Einstein a identificar dicha combinación del tensor de Ricci $R_{\alpha\beta}$ con el tensor $G_{\alpha\beta}$. Por otra parte, dado que $g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$, no se puede excluir en principio un término adicional de la forma $\Lambda g_{\alpha\beta}$, con Λ constante, ya que $\Lambda g^{\alpha\beta}_{\ \ ;\beta} = 0$. En resumen, concluyó Einstein, las ecuaciones de campo deben tener la forma

$$R_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta} R + \Lambda g_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}, \tag{VIII.12}$$

donde se relacionan la geometría del espacio-tiempo, en el lado izquierdo, con las condiciones físicas descritas por el tensor $T_{\alpha\beta}$ en el lado derecho.

Nótese que la traza de esta ecuación (es decir, su contracción con $g_{\alpha\beta}$) es

$$-R + 4\Lambda = \kappa T \tag{VIII.13}$$

(donde $T = g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}$), por lo que también se puede escribir en la forma

$$R_{\alpha\beta} - \Lambda g_{\alpha\beta} = \kappa (T_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} T). \tag{VIII.14}$$

Sólo falta ahora comprobar que se obtiene la ecuación de Poisson en el límite newtoniano y, de paso, encontrar así el valor de la constante de proporcionalidad κ. Para ello es necesario calcular el tensor de Riemann para la métrica definida por la fórmula (VIII.6).

EJERCICIO VIII.2. Demostrar que los coeficientes de Christoffel para la métrica (VIII.6) tienen la forma:

$$\begin{array}{lll} \Gamma^a_{bc} = 0(c^{-2}) & \Gamma^a_{b0} = 0(c^{-2}) & \Gamma^a_{00} = \dfrac{\partial \Phi}{c^2 \partial x^a} + 0(c^{-4}) \\ \Gamma^0_{ab} = 0(c^{-2}) & \Gamma^0_{a0} = \dfrac{\partial \Phi}{c^2 \partial x^a} + 0(c^{-4}) & \Gamma^0_{00} = 0(c^{-2}). \end{array} \tag{VIII.15}$$

EJERCICIO VIII.3. A partir de aquí demuestre que

$$R_{00} = \frac{1}{c^2} \nabla^2 \Phi + 0(c^{-4}). \tag{VIII.16}$$

Para hacer la comparación con la ecuación de Poisson, utilicemos el tensor $T^{\alpha\beta}$ para fluidos perfectos (VI.10):

$$T^{\alpha\beta} = (e + p) u^\alpha u\beta + p g^{\alpha\beta},$$

que implica $T = 3p - e$. Recordando que $e = \rho c^2 + \rho\varepsilon$, se tiene

$$T_{00} - \tfrac{1}{2} g_{00} T = \tfrac{1}{2} \rho c^2, \tag{VIII.17}$$

como término dominante (de orden c^2). Usando la ecuación (VIII.14), resulta

$$\nabla^2 \Phi = \tfrac{1}{2} \kappa \rho c^4 - \Lambda c^2 + 0(c^{-2}). \tag{VIII.18}$$

Comparando esta ecuación con la de Poisson(VIII.10), vemos que

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \qquad \Lambda = 0(c^{-4}). \tag{VIII.19}$$

Así, llegamos a las *ecuaciones de Einstein*

$$\boxed{R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R + \Lambda g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}}, \tag{VIII.20}$$

donde Λ es la llamada constante cosmológica y corresponde a una fuerza repulsiva de la gravedad a escala cósmica.[4] Por lo general se pone $\Lambda = 0$, pero, como veremos en el último capítulo, hay evidencias recientes de que no se puede eliminar en los modelos cosmológicos.[5] Estas ecuaciones, y la formulación definitiva de la relatividad general, fueron presentadas por Einstein en noviembre de 1915.

Las ecuaciones de Einstein (VIII.20) son un conjunto de 10 ecuaciones diferenciales altamente no lineales, de segundo orden, para las 10 incógnitas $g_{\alpha\beta}$. Una solución general de estas ecuaciones no se puede encontrar, ni tiene sentido buscarla. Lo que sí se puede hacer es resolverlas en casos particulares que correspondan a situaciones físicas bien determinadas; esto se hará en los siguientes dos capítulos.

El caso más simple corresponde al del *vacío:* la región exterior de una distribución de masa en la que no hay materia ni energía, sólo campo gravitacional. En esa región $T_{\alpha\beta} = 0$ y, según la ecuación de Einstein, $R_{\alpha\beta} = 0$ (si se pone $\Lambda = 0$, de lo contrario: $R_{\alpha\beta} = \Lambda g_{\alpha\beta}$). En el interior del cuerpo masivo, obviamente $R_{\alpha\beta} \neq 0$. Es importante notar que $R_{\alpha\beta} = 0$ *no* implica que el espacio sea plano; para ello se tienen que anular todas y cada una de las 20 componentes del tensor de Riemann $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, y no sólo las 10 componentes del tensor de Ricci, $R_{\alpha\beta}$.

En el próximo capítulo estudiaremos un caso particular, pero muy importante, de las ecuaciones de Einstein en el vacío. El capítulo x estará dedicado a la aplicación de estas ecuaciones a la cosmología.

[4] Nótese que Λ tiene unidades de $(longitud)^{-2}$; a veces se escribe $c^2\Lambda$ en las ecuaciones de Einstein para que tenga unidades de $(tiempo)^{-2}$.

[5] El mismo Einstein se arrepintió posteriormente de haberla introducido en sus ecuaciones, y declaró que había sido el "error más grande de vida". Sin embargo, la constante cosmológica volvió a renacer después de un largo letargo. Véase el capítulo x.

IX. CAMPO GRAVITACIONAL CON SIMETRÍA ESFÉRICA

Las ecuaciones de Einstein son demasiado complicadas para poderse resolver con toda generalidad. Se pueden resolver aproximadamente si se trata de encontrar correcciones relativistas producidas por un campo gravitacional débil, caso en el cual los efectos relativistas se toman como perturbaciones. En cuanto a soluciones exactas, sólo se conocen unas cuantas que describen espacio-tiempos con condiciones de simetría muy restrictivas; sólo con tales restricciones es posible simplificar las ecuaciones de Einstein y, así, encontrar soluciones exactas aunque particulares. La primera solución exacta de las ecuaciones de Einstein fue obtenida por Karl Schwarzschild[1] a principios de 1916, un par de meses después de que Einstein presentara la versión definitiva de su teoría.

La solución de Schwarzschild describe el espacio-tiempo generado por una distribución de materia con simetría esférica, la cual evidentemente genera un campo gravitacional con esa misma simetría. Fuera de la región esférica que contiene la materia, se tiene $T_{\alpha\beta} = 0$ y las ecuaciones de Einstein implican por lo tanto que $R_{\alpha\beta} = 0$ (tomamos $\Lambda = 0$). La simetría del problema permite importantes simplificaciones; por ejemplo, dado que la métrica bidimensional de la superficie de una esfera es proporcional a $d\theta^2 + \text{sen}^2\,\theta\, d\varphi^2$, es de esperar que los ángulos θ y φ aparezcan en la expresión de ds^2 sólo en esa combinación.[2] Sin entrar en los detalles de la deducción, que se puede encontrar en cualquier libro de texto de relatividad general, nos concretaremos a dar la forma explícita de la métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2\, dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \quad \text{(IX.1)}$$

Esta forma de la métrica es consistente con la aproximación de campo débil, ecuación (VIII.6), con el potencial clásico GM/r. Al parámetro con unidad de longitud

$$r_g \equiv \frac{2GM}{c^2}$$

[1] Astrónomo y matemático alemán (1873-1916). Falleció al poco tiempo de obtener la solución que lleva su nombre, a consecuencia de una enfermedad contraída en el frente de guerra.

[2] Esto se puede demostrar rigurosamente, como puede verse en un texto avanzado de relatividad general.

que aparece muy conspicuamente en la fórmula anterior, se le llama radio gravitacional o de Schwarzschild. Este radio es proporcional a la masa del objeto que produce el campo gravitacional. Sustituyendo los valores de las constantes naturales, resulta que

$$r_g \approx 3\,\mathrm{km}\,(M/M_\odot),$$

donde $M_\odot$ es la masa del Sol. Veremos más adelante cuál es el significado físico del radio gravitacional.

Nótese que el tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ de la métrica de Schwarzschild no depende del tiempo t, por lo que se trata de un espacio-tiempo estático. De hecho, se puede demostrar que es el *único* espacio-tiempo con simetría esférica (teorema de Birkhoff),[3] lo cual implica que si una esfera masiva pulsa, se contrae o se expande, pero sin romper su simetría esférica, el campo gravitacional en su exterior sigue siendo el mismo y depende únicamente de la masa total de la esfera.

Es evidente que la métrica de Schwarzschild se reduce a la de Minkowski en el límite $r \to \infty$, ya que el campo gravitacional se desvanece a grandes distancias. Lo anterior permite identificar a las coordenadas r y t como las coordenadas radiales y temporales *para un observador lejano*. Sin embargo, cerca del radio de Schwarzschild, r y t son sólo coordenadas que describen el espacio-tiempo; no tienen un sentido físico específico. En particular, la métrica de Schwarzschild en la forma (IX.1) diverge en $r = r_g$, pero esto es sólo un efecto del sistema de coordenadas utilizado; si se calcula el tensor de Riemann completo, se verá que sus únicas componentes divergentes son de la forma r_g/r^3, por lo que la singularidad real del espacio-tiempo de Schwarzschild está en $r = 0$. Al final de este capítulo se presentará otro sistema de coordenadas que no tiene el problema mencionado.

IX.1 Movimiento de partículas en el espacio-tiempo de Schwarzschild

Veamos primero cómo se mueve una partícula de prueba en el campo gravitacional de un objeto masivo como el Sol o cualquier estrella. El Sol no es exactamente esférico, pero la aproximación esférica es suficientemente buena para que la teoría de Einstein prediga resultados novedosos con respecto a la mecánica de Newton. Antes de abordar el problema relativista, hagamos un *breve repaso de mecánica celeste clásica.*

[3] George David Birkhoff (1884-1944), matemático estadounidense.

En mecánica clásica, el lagrangiano $L = T - V$ que describe el movimiento de un planeta es

$$\frac{L}{m} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{GM}{r},$$

donde m es la masa del planeta, M la masa del Sol y r la distancia radial del centro del Sol al planeta. Debido a la simetría esférica del campo gravitacional, la órbita de una partícula se restringe siempre a un mismo plano, por lo que es válido tomar $\theta = \pi/2$ sin perder generalidad. Dado que el lagrangiano no depende explícitamente del ángulo azimutal φ ni del tiempo, se tienen dos constantes de movimiento: el momento angular l y la energía $\mathcal{E}$, ambas tomadas por unidad de masa del planeta (recuérdese que, debido al principio de equivalencia, esta masa es irrelevante para el movimiento):

$$l = r^2\dot{\varphi}^2, \tag{IX.2}$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{l^2}{r^2}\right) - \frac{GM}{r}. \tag{IX.3}$$

Queda por resolver la ecuación de Lagrange correspondiente a la variable r. Para ello es conveniente definir una nueva variable $u = 1/r$ y cambiar las derivadas temporales a azimutales por medio de la identidad $r^2 d/dt = l\,d/d\varphi$. Así, con un poco de álgebra, se llega a la ecuación fundamental

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{l^2}, \tag{IX.4}$$

cuya solución es una cónica

$$\frac{1}{r} = u = \frac{GM}{l^2}(1 + e\cos\varphi) \tag{IX.5}$$

de excentricidad e.

Veamos ahora cómo generalizar el análisis anterior a la relatividad general. Las órbitas están descritas por la ecuación de las geodésicas (VII.42), en la que aparecen los coeficientes de Christoffel que se deben evaluar para la métrica de Schwarzschild. En la práctica resulta un poco más cómodo notar que dichas ecuaciones se obtienen de un lagrangiano de la forma $\widetilde{L} = g_{\mu\nu}(dx^\mu/d\tau)(dx^\nu/d\tau)$, donde τ es el tiempo propio $\tau = \sqrt{-ds^2}/c$ de la partícula. Así, para la métrica de Schwarzschild, podemos tomar directamente como lagrangiano (con $\theta = \pi/2$)

$$\widetilde{L} = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2\dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2, \tag{IX.6}$$

donde el punto denota derivada con respecto a τ: $\dot{(\ )} \equiv d(\ )/d\tau$.

Dado que el lagrangiano no depende explícitamente de t y φ, encontramos de inmediato dos constantes de movimiento:

$$\mathcal{E} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 \dot{t} \rightarrow \text{energía total por unidad de masa,} \tag{IX.7}$$

$$l = r^2 \dot{\varphi} \rightarrow \text{momento angular por unidad de masa.} \tag{IX.8}$$

Estas constantes resultan de integrar las ecuaciones de Lagrange correspondientes a las componentes t y φ y generalizan las constantes de movimiento clásicas (con un término adicional c^2 para $\mathcal{E}$). La tercera ecuación de Lagrange corresponde a la componente r, pero su integral se puede obtener directamente con sólo notar que, por definición misma, $ds^2/d\tau^2 = -c^2$, por lo que

$$-c^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 \dot{t} + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2. \tag{IX.9}$$

Sustituyendo los valores de las constantes de movimiento, resulta

$$\dot{r}^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)\left(c^2 + \frac{l^2}{r^2}\right). \tag{IX.10}$$

Cambiando de la variable τ a φ por medio de la relación

$$dr/d\tau = (l/r^2)(dr/d\varphi) = -l\,du/d\varphi$$

(donde $u = 1/r$), y derivando la ecuación anterior, se llega finalmente a

$$u'' + u = \frac{GM}{l^2} + \frac{3GM}{c^2} u^2, \tag{IX.11}$$

donde la prima denota $d/d\varphi$. Ésta es la ecuación que describe el movimiento de las partículas en un campo gravitacional con simetría esférica. Si la comparamos con la ecuación clásica equivalente, (IX.5), vemos que la relatividad general introduce un término adicional $3GMu^2/c^2$ como una corrección relativista de orden c^{-2}. Este término es muy pequeño para movimientos no relativistas; en nuestro Sistema Solar, su efecto se puede detectar para el planeta Mercurio.

EJERCICIO IX.1. Tomando el término $3GMu^2/c^2$ como una perturbación de primer orden, demuestre que una solución aproximada de la ecuación (IX.11) tiene la forma de una expansión de Fourier

$$u = \frac{GM}{l^2}[1 + e\cos(K\varphi)] - \alpha\cos(2K\varphi), \tag{IX.12}$$

donde $K \approx 1 - 3(GM/lc)^2$ y $\alpha \approx (GM)^3 e^2/2l^4c^2$. Nótese que r es máximo o mínimo para valores de φ que satisfacen la condición

$$u' = K\left[-\frac{GM}{l^2} e \operatorname{sen}(K\varphi) + 2\alpha \operatorname{sen}(2K\varphi)\right] = 0. \qquad \text{(IX.13)}$$

Una solución obvia de esta ecuación es $\varphi = 0$; si no fuera por los términos correctivos en $1 - K$ y α, habría otra solución $\varphi = 2\pi$ (caso de la elipse), pero debido a estas correcciones de 1er orden, la segunda solución tendrá la forma $\varphi = 2\pi + \Delta\varphi$, lo cual implica que el perihelio avanza un ángulo $\Delta\varphi$ en cada vuelta (figura IX.1). Demuestre que

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi GM}{a(1 - e^2)c^2},$$

donde a es el semieje mayor del planeta, que está relacionado con el momento angular por la fórmula clásica $l^2 = GMa(1 - e^2)$. Demuestre que para Mercurio, $\Delta\varphi = 42.9$ segundos por siglo.

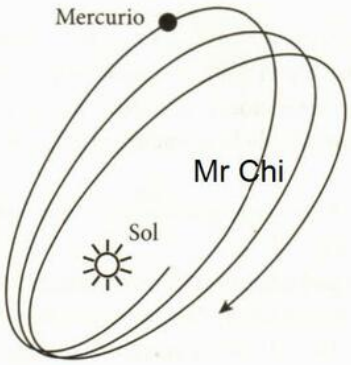


FIGURA IX.1

El corrimiento del perihelio de Mercurio predicho por la relatividad general coincide muy bien con las observaciones astronómicas que se conocían desde el siglo XIX. Este resultado fue uno de los primeros éxitos de la teoría de Einstein.

IX.2 MOVIMIENTO DE FOTONES

Las ecuaciones que describen la trayectoria de rayos luminosos en un campo de Schwarzschild son exactamente las mismas obtenidas en la sección anterior, con la diferencia de que τ ya no puede interpretarse como un tiempo propio

sino como algún otro parámetro. La otra diferencia básica es que, debido a la condición $ds^2 = 0$, la ecuación (IX.9) se vuelve

$$-\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2\dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = 0. \tag{IX.14}$$

Con esta modificación, se sigue exactamente el álgebra para obtener la ecuación (IX.11), lo cual dejamos como un ejercicio.

EJERCICIO IX.2. Demuestre que la trayectoria de un fotón está dada por la ecuación

$$u'' + u = \frac{3GM}{c^2}u^2, \tag{IX.15}$$

donde $u = 1/r$.

EJERCICIO IX.3. En la aproximación newtoniana ($c \to \infty$), la ecuación (IX.15) se reduce a

$$u'' + u = 0,$$

cuya solución es simplemente $u = a^{-1}\cos\varphi$, que es la ecuación de una recta (como era de esperarse) que pasa a una distancia a del origen. El término de la derecha en la ecuación (IX.15) es la corrección relativista a la trayectoria de la luz. Demuestre que una solución aproximada de la ecuación (IX.15) es

$$u = \frac{1}{a}\cos\varphi + \frac{GM}{c^2a^2}\left(1 + \operatorname{sen}^2\varphi\right). \tag{IX.16}$$

Cuando $r \to \infty, u \to 0$, y el ángulo φ tiende asintóticamente al valor que anula el miembro derecho de esta ecuación. Sin la corrección relativista, la solución sería simplemente $\varphi = \pm\pi/2$. Debido al término relativista, la solución de (IX.16) para $u \to 0$ es

$$\varphi = \pm\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\varphi}{2}\right), \tag{IX.17}$$

donde, en una primera aproximación,

$$\Delta\varphi = \frac{4GM}{c^2a}. \tag{IX.18}$$

La fórmula (IX.18) implica que la posición aparente de una estrella que se ve cerca del disco solar queda desplazada un ángulo $\Delta\varphi$ con respecto al centro del Sol, tal como se ve en la figura IX.2. Si se toma a como el radio solar (la trayectoria de la luz pasa rozando al Sol), resulta

$$\Delta\varphi = 1''.75.$$

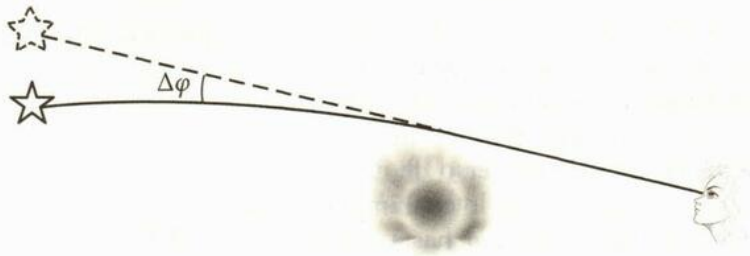


FIGURA IX.2

La fórmula anterior se puede comprobar durante un eclipse, la única ocasión en que se pueden ver estrellas cerca del Sol. La primera confirmación del efecto fue realizada durante un eclipse solar que tuvo lugar en 1919 y los resultados concordaron con la predicción teórica dentro de los rangos de error posibles en esa época. Desde entonces, las observaciones se han repetido de diversas formas, incluso con ondas de radio, que tienen la ventaja de ser detectables en pleno día sin necesidad de esperar eclipses. Los resultados concuerdan perfectamente con las predicciones de la teoría.

IX.3 ANÁLISIS DE LA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

Estudiemos ahora *sin* aproximaciones el movimiento en el espacio-tiempo de Schwarzschild, para así, de paso, elucidar el carácter físico del radio gravitacional $r_g \equiv 2GM/c^2$. Mencionamos anteriormente que la métrica de Schwarzschild tiende asintóticamente a la de Minkowski, lo cual permite identificar a t como el tiempo medido por un observador lejano. Sin embargo, ese tiempo difiere notablemente del medido cerca de r_g, como veremos a continuación.

Analicemos el movimiento de un fotón que se mueve *radialmente*. En este caso, $ds = 0$ y $\theta = \varphi =$ constantes, por lo que se tiene simplemente

$$-\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)c^2\,dt^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0 \qquad \text{(IX.19)}$$

y, por lo tanto,

$$c\frac{dt}{dr} = \pm\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}. \qquad \text{(IX.20)}$$

La solución de esta ecuación es

$$ct = \pm\left[r + r_g \ln\left(\frac{r}{r_g} - 1\right)\right] + \text{constante}. \qquad \text{(IX.21)}$$

Si $r \gg r_g$, la ecuación (IX.20) implica $c\,dt/dr = \pm 1$, que es la ecuación de dos rectas que delimitan el cono de luz en un espacio-tiempo plano.

Sin embargo, a medida que nos acercamos a r_g, se produce una situación nueva: la pendiente de la línea de universo de una señal luminosa, $c\,dt/dr \to \pm\infty$, lo cual implica que *el cono de luz se va cerrando*, hasta cerrarse por completo en $r = r_g$ (figura IX.3).

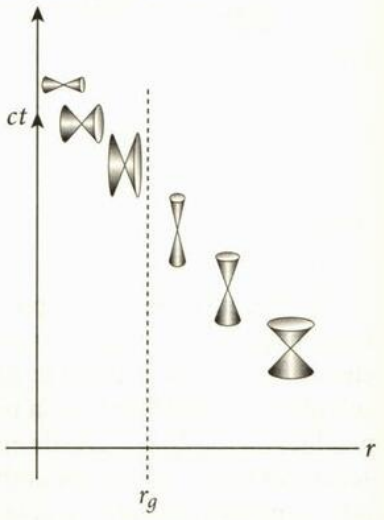


FIGURA IX.3

En la región $r < r_g$ sucede algo aún más curioso: las dos rectas que forman el cono de luz se vuelven a abrir, pero, en esa región, las componentes g_{00} y g_{11} *cambian* sus signos. En consecuencia, para $r < r_g$, las coordenadas t y r intercambian sus papeles: la coordenada temporal es r y el cono de luz contiene al eje r, que es el nuevo eje temporal, tal como se ve en la figura IX.3. Más aún, dentro del radio gravitacional, todo cono de luz contiene al punto $r = 0$ en su futuro. En consecuencia, toda partícula que penetre el radio gravitacional terminará forzosamente en la singularidad, $r = 0$, donde será destruida por las fuerzas de marea.[4] Más aún, ninguna señal, luminosa o material, puede salir de la región $r < r_g$. ¡Se trata de lo que se llama un *hoyo negro*! La superficie definida por $r = r_g$ es el *horizonte de eventos*, que sólo se puede cruzar en una dirección.

La aparente singularidad de la métrica en $r = r_g$ no es una singularidad física, sino que se debe al sistema de coordenadas utilizado. Las coordenadas de Schwarzschild no son muy adecuadas para la región $r \leq r_g$, pero hay otros sistemas de coordenadas que permiten quitar la singularidad ficticia: por ejemplo, las llamadas coordenadas de Eddington.[5] Estas resultan de poner la métrica de Schwarzschild en la forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left[c\,dt + \frac{dr}{1 - r_g/r}\right]\left[c\,dt - \frac{dr}{1 - r_g/r}\right] + r^2\left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2\right), \tag{IX.22}$$

y definir una nueva coordenada

[4] Se puede demostrar que las fuerzas de marea son proporcionales al tensor de Riemann, el cual, en este caso, diverge como r_g/r^3.

[5] Arthur Stanley Eddington (1882-1944), astrónomo y matemático inglés, considerado el fundador de la astrofísica. Fue él quien realizó la primera medición de la desviación de la luz predicha por Einstein.

$$V = ct + r + r_g \ln\left(\frac{r}{r_g} - 1\right), \tag{IX.23}$$

o sea

$$dV = c\,dt + \frac{dr}{1 - r_g/r}. \tag{IX.24}$$

La métrica (IX.22) toma así la forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dV^2 + 2\,dV\,dr + r^2\left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2\right), \tag{IX.25}$$

donde la coordenada V sustituye a la t. En estas nuevas coordenadas se ve claramente que la métrica de Schwarzschild *no* tiene ninguna singularidad en $r = r_g$.

Utilicemos esta forma de la métrica para analizar el movimiento puramente radial de fotones. Se tiene $d\theta = 0 = d\varphi$, así que la ecuación (IX.25) implica que hay dos trayectorias de fotones que satisfacen la condición $ds^2 = 0$. Una es $dV = 0$ y la otra

$$\frac{dV}{dr} = \frac{2}{1 - r_g/r}. \tag{IX.26}$$

En la región $r \gg r_g$, las dos soluciones son $V =$ constante y $V = 2r +$ constante, que representan dos rectas que limitan el cono de luz en el espacio de Minkowski. En la figura IX.4 se ha trazado el eje V a 45° con respecto al eje r, porque $V = ct + r$ para $r \gg r_g$, según la ecuación (IX.24).

Para cualquier r, incluso en $r \sim r_g$, la condición $V =$ constante siempre describe un fotón que va *hacia* $r = 0$. Pero la condición (IX.26), que corresponde a un fotón que se *aleja* de $r = 0$, describe el lado derecho del cono de luz y, tal como se muestra en la figura IX.4, la línea de universo de ese fotón se empieza a empinar a medida que se acerca al radio gravitacional y acaba totalmente vertical en $r = r_g$. Para $r < r_g$, el cono de luz apunta *siempre* hacia $r = 0$. Así, queda claro que una partícula puede penetrar el radio de Schwarzschild, pero ya no puede salir de ahí. Se trata de un hoyo negro.

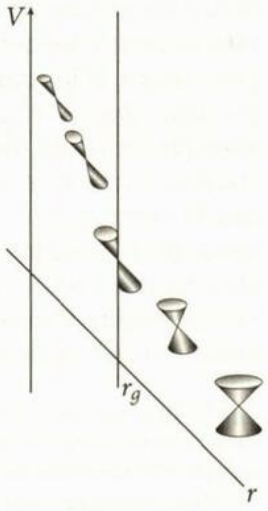


FIGURA IX.4

IX.4 Colapso gravitacional

¿Existen hoyos negros en el Universo? Un posible mecanismo para formarlos es el colapso gravitacional de las estrellas al final de su vida. La fuente de energía de una estrella son las reacciones de fusión nuclear que ocurren en su centro, pero cuando el combustible nuclear se agota, la presión del gas en la estrella no puede compensar su propia gravedad, y ésta empieza a colapsarse. En 1930, Chandrasekhar[6] demostró que una estrella cuya masa no excede 1.4 veces la masa del Sol termina como *enana blanca*: una estrella de unos 4 mil kilómetros de radio, con una densidad de mil kilogramos por centímetro cúbico; en estas estrellas, la presión de los electrones relativistas degenerados es suficiente para detener el colapso gravitacional. La situación es distinta para estrellas más masivas; éstas terminan en una explosión de supernova, arrojando al espacio una fracción importante de su material y dejando el núcleo desnudo de la estrella en forma de una *estrella de neutrones*: un objeto de sólo diez kilómetros de radio, con una masa algo mayor que la masa solar y una densidad de más de 10^{12} kilogramos por centímetro cúbico (la densidad de un núcleo atómico). En una estrella de neutrones, los protones se han fusionado con los electrones para producir neutrones y el colapso gravitacional se detiene por la presión de los neutrones degenerados. Sin embargo, si la masa de la estrella de neutrones excede unas dos veces la masa del Sol, esta presión resulta insuficiente y la estrella seguirá contrayéndose indefinidamente bajo su propia fuerza de gravedad, hasta formar eventualmente un hoyo negro.[7]

Un hoyo negro se puede detectar por los efectos que produce sobre la materia a su alrededor. Por ejemplo, puede suceder que, en un sistema binario estelar, una de las estrellas evolucione más rápidamente que la otra y se vuelva hoyo negro. Si los dos cuerpos giran suficientemente cerca uno del otro, el hoyo negro absorbe el gas de su compañera, el cual no cae directamente al hoyo sino que forma un disco de *acreción* a su alrededor; el material se calienta por fricción a varios millones de grados y emite radiación, principalmente en forma de rayos X, antes de ser engullido definitivamente. La emisión de rayos X desde un sistema binario del que sólo se observa una estrella es un buen indicio de la presencia de un hoyo negro. Desde 1970, cuando se lanzó por primera vez un satélite de observación de rayos X, se han detectado varias fuentes de radiación en la galaxia que podrían corresponder al escenario descrito.

[6] S. Chandrasekhar (1910-1995), astrofísico indo-británico a quien se deben numerosas contribuciones a muy diversos campos de la astrofísica. Recibió el Premio Nobel de física en 1983 por sus trabajos sobre la estructura de las estrellas, en particular las enanas blancas.

[7] Para más detalles, véase S. Hacyan, *Los hoyos negros y la curvatura del espacio-tiempo*, 3ª ed., FCE, México, 2003.

Otro posible mecanismo para formar hoyos negros es el colapso de una gran masa de gas, de varios millones de veces la masa de una estrella, cuando el Universo era mucho más denso (véase el capítulo x). Se pudieron formar así hoyos negros gigantescos que, posteriormente, atrajeron el gas a su alrededor y dieron origen a las galaxias. Este escenario se sustenta en el hecho de que la gran mayoría de las galaxias exhiben en sus centros grandes concentraciones de masa que bien podrían ser hoyos negros supermasivos.

El mecanismo del colapso gravitacional que puede dar origen a un hoyo negro fue estudiado por Oppenheimer y Snyder en el marco de la relatividad general, en un artículo pionero.[8] A continuación seguiremos su análisis, que consiste en reproducir los rasgos esenciales del colapso con un modelo sencillo: una nube esféricamente simétrica de polvo que se contrae debido a su propia gravedad (por polvo se entiende un gas sin presión interna, en el que los choques entre las partículas es despreciable).

Como se mencionó anteriormente, el teorema de Birkhoff implica que el campo gravitacional afuera de cualquier distribución esféricamente simétrica de masa está descrito por la métrica de Schwarzschild, independientemente de si esa masa se contrae o dilata. Si la esfera masiva tiene un radio R que varía con el tiempo, el campo será de Schwarzschild para $r > R$ y tendrá alguna otra forma en el interior, $r < R$.

Si se trata de una esfera de polvo, el tensor de materia que describe su interior es

$$T_{\alpha\beta} = \rho c^2 u_\alpha u_\beta, \tag{IX.27}$$

donde ρ es la densidad de la materia en el sistema comóvil (que se mueve con la materia), y u_α es el vector tangente a la trayectoria de cada grano de polvo.

Las dos condiciones $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$ y $(\rho u^\alpha)_{;\alpha} = 0$ —que corresponden respectivamente a la conservación de energía-momento y de masa— combinadas implican

$$u^\beta u^\alpha{}_{;\beta} = 0,$$

que es justamente la ecuación de las geodésicas. Resulta, pues, que las partículas de polvo se mueven a la largo de geodésicas debido a que no hay una fuerza adicional de presión que actúe sobre ellas.

El tensor $T_{\alpha\beta}$ tiene una discontinuidad *finita* en la superficie de la esfera, en $r = R$, y por lo tanto el tensor de Ricci también es discontinuo ahí. Como

[8] Se recomienda leer el artículo original (es bastante comprensible): J. R. Oppenheimer y H. Snyder "On Continued Gravitational Contraction", *Physical Review* **56** (5) : 455-459 (1939).

este tensor está formado de segundas derivadas de $g_{\alpha\beta}$, tanto $g_{\alpha\beta}$ como sus primeras derivadas deben ser continuas en la superficie $r = R$. Esto implica que, sin importar la forma que tenga el espacio-tiempo *dentro* de la esfera, justo en su superficie la métrica correspondiente es la de Schwarzschild. Pero, además, un punto sobre la superficie de la esfera de polvo se mueve como una geodésica, por lo que esa superficie debe seguir la trayectoria de una geodésica en el espacio-tiempo de Schwarzschild, independientemente de lo que suceda en el interior.

Analicemos, pues, el movimiento geodésico de una partícula que se encuentra justo sobre la superficie de la esfera en contracción. Esto corresponde al caso en que el momento angular $l = 0$ y $\dot{\varphi} = 0$, así que las ecuaciones geodésicas que vimos anteriormente se reducen a

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} = \frac{\mathcal{E}}{c^2} \tag{IX.28}$$

$$c^2\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = c^2, \tag{IX.29}$$

donde $\mathcal{E}$ es la energía por unidad de masa de la partícula. El tiempo propio de la partícula es τ, que es justamente el tiempo medido en un reloj colocado sobre la superficie de la esfera en contracción. En cambio, t es el tiempo medido por un observador lejano, el cual está relacionado con el otro tiempo τ por medio de la relación (IX.28). Combinando las ecuaciones de movimiento (IX.28) y (IX.29), se obtiene

$$\tau = -c\int_r^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{\mathcal{E}^2 - c^4(1 - r_g/r)}}, \tag{IX.30}$$

donde r_0 es el radio inicial de la esfera. Esta fórmula da el tiempo que tarda una esfera con un radio inicial de r_0 en colapsarse hasta volverse un punto de densidad infinita, tiempo medido por un observador montado sobre la superficie de la esfera: es un tiempo *finito* porque la integral no diverge para $r \to 0$.

¿Cómo se ve el proceso del colapso desde lejos? La coordenada t es el tiempo medido por un observador lejano. A partir de las mismas ecuaciones de movimiento anteriores, resulta

$$t = t_0 - \frac{\mathcal{E}}{c}\int_r^{r_0} \frac{dr}{(1 - r_g/r)\sqrt{\mathcal{E}^2 - c^4(1 - r_g/r)}}, \tag{IX.31}$$

pero esta integral *sí* diverge en $r = r_g$. De hecho, la divergencia es logarítmica:

$$c(t - t_0) \approx r_g \ln\left(\frac{r}{r_g} - 1\right), \tag{IX.32}$$

o sea

$$\frac{r}{r_g} - 1 \approx e^{-c(t-t_0)/r_g}.$$

Visto por un observador lejano, el radio de la esfera tenderá asintóticamente a r_g a medida que $t \to \infty$, sin nunca alcanzar ese valor.

Para un observador que cae junto con la esfera, el colapso tomará un tiempo finito, incluyendo el momento en que cruza el radio de Schwarzschild. En cambio, un observador lejano lo verá acercarse asintóticamente a ese radio crítico, sin nunca llegar a él. Visto desde lejos, el tiempo sobre la esfera se expande cada vez más, los sucesos ahí parecen quedar congelados y la luz emitida se vuelve cada vez más roja. Se trata del caso más extremo de relatividad del tiempo.

X. COSMOLOGÍA

La relatividad general de Einstein es la base teórica de la cosmología moderna, ya que permite analizar el comportamiento del Universo a gran escala. Inicialmente, el mismo Einstein buscó una aplicación de su teoría a la descripción dinámica del Universo. Así, en 1917 propuso un modelo cosmológico muy simple con la intención de resolver la vieja controversia sobre si el Universo es finito o infinito: en su concepción original, el espacio cósmico era semejante a la superficie de una esfera, que es finita pero sin fronteras. El modelo cosmológico de Einstein era estático: las estrellas se mantenían fijas gracias a una especie de repulsión gravitacional introducida en forma *ad hoc*. Sin embargo, en 1924 Friedman[1] mostró que las ecuaciones de la relatividad general también admiten soluciones que describen un universo dinámico en expansión, y a conclusiones semejantes llegó Lemaître[2] en 1927, en forma independiente. Al principio, los trabajos de Friedman y Lemaître no fueron tomados en serio, pero en 1929 Hubble[3] logró medir por primera vez la distancia a las galaxias y descubrió que el Universo está efectivamente en expansión. A partir de entonces, la cosmología moderna se volvió una ciencia basada en observaciones astronómicas y teorías físicas.

Lemaître propuso en 1932 la teoría del "átomo primordial", según la cual el Universo habría empezado a expandirse a partir de un estado de gran densidad. Siguiendo con esa idea, Gamow[4] formuló unos años después la hipótesis de que el Universo no sólo era más denso en el pasado, sino también extremadamente caliente. El propósito original de Gamow era explicar la formación de los elementos químicos por medio de reacciones nucleares que requieren muy altas temperaturas. La idea no funcionó para ese fin, pero de todos modos Gamow predijo que la temperatura cósmica debería ser, en la actualidad, de unos cuantos grados sobre el cero absoluto, lo cual se manifestaría como una radiación de microondas proveniente uniformemente de todas las

[1] Alexander A. Friedman, físico ruso (1888-1925).

[2] Georges Lemaître (1894-1966), físico, astrónomo y sacerdote belga.

[3] Edwin Hubble (1889-1953), astrónomo estadounidense. Estableció definitivamente la naturaleza de las galaxias y midió las distancias cósmicas. Cambió radicalmente la visión del Universo que se tenía hasta principios del siglo XX.

[4] George Gamow (1904-1968), físico de origen ucraniano, establecido en los E. U. A., que hizo importantes contribuciones a la física nuclear y la cosmología.

regiones del Universo. En los años sesenta, varios grupos de físicos y astrónomos se propusieron encontrar esta radiación cósmica, pero fueron A. Penzias y R. Wilson, investigadores de los laboratorios Bell, quienes la descubrieron en forma más bien accidental (su intención original era clasificar las señales de radio provenientes del cielo para no confundirlas con las utilizadas en las radiocomunicaciones).

La expansión del Universo y la radiación cósmica motivaron la teoría de la Gran Explosión (*Big Bang* en inglés), según la cual el Universo "nació" en un estado de densidad y temperatura prácticamente infinitas.[5] Las observaciones realizadas en las últimas décadas con satélites, globos sonda y telescopios de nueva tecnología tienden a reforzar, en forma muy convincente, la teoría de la Gran Explosión. Esta teoría ha predicho correctamente no sólo las características de la radiación cósmica, sino también las abundancias primordiales de hidrógeno, helio y otros elementos químicos. A continuación se expondrán brevemente las bases teóricas que dan sustento a la cosmología moderna.

X.1 Ecuaciones fundamentales

A muy gran escala, correspondiente al de cúmulos de galaxias,[6] el Universo parece homogéneo e isótropo. Se trata de un principio "copernicano" extendido que implica que no hay regiones ni direcciones privilegiadas en el espacio cósmico, al menos a muy gran escala. Más precisamente, el espacio cósmico de tres dimensiones es un espacio tridimensional homogéneo e isótropo, que está en plena expansión en forma uniforme.

En dos dimensiones, existen dos clases de espacios homogéneos e isótropos: el espacio plano de la geometría euclidiana y la superficie de una esfera. En su trabajo original de 1917, Einstein tuvo la idea de tomar este segundo caso como una analogía para el espacio cósmico. En su modelo, el Universo a gran escala tenía la geometría de la hipersuperficie tridimensional de una hiperesfera en cuatro dimensiones: un espacio riemanniano de tres dimensiones que es homogéneo e isótropo, y que, siendo curvo, se cierra sobre sobre sí mismo.

[5] Estrictamente hablando, no se puede hablar de un "tiempo cero" porque los efectos cuánticos debieron de dominar en los primeros instantes del Universo. Es común fijar el "principio del tiempo" en el *tiempo de Planck*, $\sqrt{Gh/c^5} \sim 10^{-44}$ segundos, donde h es la constante de Planck. A la energía de Planck, $\sqrt{hc^3/G}$, corresponde una temperatura de 10^{32} K, que se suele tomar como la temperatura inicial del Universo. Véase S. Hacyan, *Del mundo cuántico al Universo en expansión*, 2ª ed., FCE, México, 2002.

[6] Recordemos que las estrellas se agrupan en galaxias —que constan de miles de millones de estrellas— y las galaxias forman, a su vez, cúmulos de galaxias; éstas se distribuyen en filamentos en forma bastante homogénea a muy gran escala.

La métrica del espacio tridimensional con las propiedades anteriores se puede obtener de la definición de una hiperesfera de radio R en un espacio euclidiano de cuatro dimensiones, con coordenadas cartesianas $\{x, y, z, w\}$ y una métrica $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2$. La superficie de la hiperesfera está dada por

$$\begin{aligned} x &= R \operatorname{sen}\chi \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ y &= R \operatorname{sen}\chi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z &= R \operatorname{sen}\chi \cos\theta \\ w &= R \cos\chi, \end{aligned} \tag{X.1}$$

$(0 \leq \chi \leq \pi)$, lo cual satisface la condición $R^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$.

EJERCICIO X.1. Demuestre a partir de las ecuaciones anteriores que la métrica del espacio generado es

$$dl^2 = R^2 \left[d\chi^2 + \operatorname{sen}^2\chi (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2) \right]. \tag{X.2}$$

Deduzca el elemento de volumen y calcule el volumen total de este espacio.

La hipersuperficie de una hiperesfera no es el único espacio tridimensional con la propiedad de ser homogéneo e isótropo. Obviamente cualquier espacio euclidiano (es decir, plano) tiene también estas propiedades. Asimismo, existe en tres dimensiones otro tipo de espacio, llamado hiperbólico, con las mismas propiedades. Una forma única de escribir la métrica de un espacio tridimensional homogéneo e isótropo es

$$dl^2 = R^2 \left[d\chi^2 + f^2(\chi)(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2) \right], \tag{X.3}$$

donde $f(\chi) = \{\operatorname{sen}(\chi), \chi, \operatorname{senh}(\chi)\}$ según si se trata de un espacio hiperesférico, plano o hiperbólico, respectivamente. Se dice que estos tres casos corresponden a espacios con *curvatura gaussiana* positiva, cero o negativa. En particular, de los tres espacios, el hiperesférico es el único que tiene un volumen finito.

En cosmología, el hecho de que el espacio sea homogéneo e isótropo se puede interpretar de la siguiente forma: existe un tiempo cósmico t tal que, en el espacio-tiempo de cuatro dimensiones que representa el Universo, la superficie t = constante corresponde a un espacio de tres dimensiones homogéneo e isótropo. Cada punto de ese espacio (que representa un cúmulo de galaxias) tiene coordenadas espaciales fijas, y su cuadrivector de velocidad, u^α, debe ser perpendicular a la hipersuperficie t = constante, ya que de lo contrario u^α tendría una proyección sobre dicha superficie que rompería la isotropía

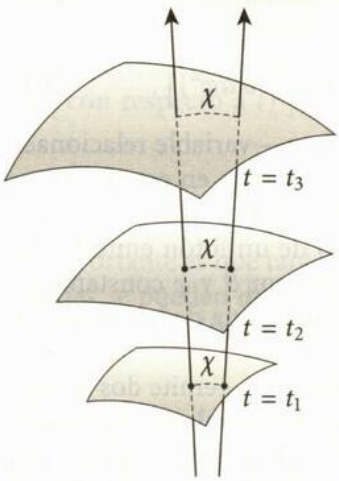


FIGURA X.1

del universo (figura X.1). De lo anterior podemos deducir que la métrica del espacio-tiempo del Universo tiene la forma

$$ds^2 = -c^2\,dt^2 + R^2(t)\,dl^2, \qquad \text{(X.4)}$$

donde t es el tiempo propio de un observador fijo en el espacio, con una línea de universo que es $u^\alpha = \{1, \mathbf{0}\}$. El factor de escala $R(t)$ describe la curvatura de la hipersuperficie espacial t = constante y desempeña un papel fundamental en la ecuaciones de la cosmología, ya que está relacionado con la distancia entre galaxias. Si imaginamos un punto fijo en el origen de las coordenadas y otro punto fijo en la coordenada espacial χ, la distancia espacial entre los dos, medida sobre la hipersuperficie t = constante, es, según (X.4),

$$l(t) = R(t)\chi, \qquad \text{(X.5)}$$

de donde se ve que la expansión del Universo está descrita por la función $R(t)$.

Se puede demostrar rigurosamente que la métrica espacio-temporal más general con la propiedad de que su sección espacial sea homogénea e isótropa es justamente la métrica dada por la ecuación (X.4), la cual se llama métrica de Robertson-Walker. Una forma alternativa de escribirla es

$$ds^2 = -c^2\,dt^2 + R^2(t)\left(\frac{du^2}{1 - K_0u^2} + u^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\,d\varphi^2)\right), \qquad \text{(X.6)}$$

donde K_0 es una constante que toma los valores 1, 0 o -1, dependiendo de si la sección espacial tiene curvatura positiva, cero o negativa. La relación con la coordenada χ está dada en los tres casos por $u = \{\operatorname{sen}\chi, \chi, \operatorname{senh}\chi\}$, como se puede comprobar fácilmente. Nótese que, de acuerdo con esta convención, las tres coordenadas espaciales son adimensionales y $R(t)$ tiene dimensión de longitud.

Veamos cómo se propaga la luz en el espacio-tiempo de Robertson-Walker. Para ello conviene hacer un cambio de coordenadas, $t \to \eta$, definido como

$$d\eta = c\frac{dt}{R(t)}, \qquad \text{(X.7)}$$

donde η es un parámetro adimensional que está relacionado con el tiempo cósmico. La métrica toma la forma

$$ds^2 = R^2(\eta)\left[-d\eta^2 + d\chi^2 + f^2(\chi)(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2)\right], \qquad \text{(X.8)}$$

donde ahora se interpreta a R como una función de η —variable relacionada con t por medio de (X.7)—. La ventaja de poner la métrica en esta forma estriba en que la ecuación para la trayectoria de la luz, dada por $ds^2 = 0$, toma una forma muy simple, ya que la línea de universo de un fotón emitido desde el origen de las coordenadas espaciales está dada por θ y φ constantes, y, en consecuencia, su trayectoria consiste simplemente de una de las dos rectas $\eta \pm \chi =$ constante, en un diagrama η contra χ.

Lo anterior implica que si un átomo en una galaxia G_{em} emite dos señales luminosas con una separación $\Delta\eta$ en su coordenada temporal, un observador lejano en otra galaxia G_{obs} recibirá esas dos señales con la misma diferencia $\Delta\eta$. Pero los tiempos propios medidos en G_{em} y en G_{obs} difieren entre sí debido a la relación (X.7); por lo tanto, la razón entre los dos tiempos propios está dada por

$$\frac{\Delta t_{\text{obs}}}{\Delta t_{\text{em}}} = \frac{R(t_{\text{obs}})}{R(t_{\text{em}})}. \qquad \text{(X.9)}$$

Si el Universo está expansión, $R(t_{\text{obs}}) > R(t_{\text{em}})$, y la ecuación anterior implica que los procesos físicos del pasado se ven en la actualidad con el tiempo expandido.

Debido a la velocidad finita de la luz, cuanto más lejos se ve en el Universo, más atrás se ve en el tiempo. El análisis anterior implica que las líneas espectrales de la luz emitida por átomos desde galaxias lejanas nos llegan con un corrimiento al rojo. Si la longitud de onda originalmente emitida era λ_0, esa misma onda nos está llegando hoy, en el tiempo cósmico t_{hoy} con un incremento $\Delta\lambda$ dado por

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_0 + \Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{R(t_{\text{hoy}})}{R(t_{\text{em}})}, \qquad \text{(X.10)}$$

donde z, en la notación estándar de la cosmología moderna, es la magnitud del corrimiento al rojo.

Hubble descubrió la expansión del Universo al notar que existe una relación directa entre el corrimiento al rojo z y la distancia de las galaxias. Si ese corrimiento se debe al efecto Doppler (como piensa la mayoría de los astrofísicos en la actualidad), la velocidad de recesión de una galaxia lejana es $V = cz$ (en una primera aproximación en z). La ley de Hubble se puede expresar en la forma tradicional

$$V = H_0 l, \qquad \text{(X.11)}$$

donde l es la distancia a la galaxia y H_0 es la llamada *constante de Hubble*. La fórmula (X.5) permite relacionar el factor de escala con la constante de Hubble: si la distancia entre dos galaxias varía según $\dot{l} = \dot{R}(t)\chi$ (el punto denota derivada con respecto a t) y la constante χ no varía para cada galaxia, entonces

$$H_0 = \frac{\dot{R}(t_{\text{hoy}})}{R(t_{\text{hoy}})}. \tag{X.12}$$

Lo importante es que tanto los corrimientos al rojo z como las distancias a las galaxias se pueden determinar observacionalmente. El valor aceptado actualmente para la constante de Hubble es[7]

$$H_0 = 67 \pm 7\,\text{km}\,\text{s}^{-1}\,\text{Mpc}^{-1}.$$

Nótese que H_0 tiene las unidades del inverso de un tiempo, que equivale a $(15 \pm 2) \times 10^9$ años, lo cual corresponde, en orden magnitud, a la "edad" del Universo.

X.2 Dinámica cósmica

Para describir la evolución física del Universo en el marco de la relatividad general, hay que introducir la forma general de la métrica (X.6) en las ecuaciones de Einstein, con un tensor de energía-momento que describa apropiadamente la distribución de materia y radiación en la escala cósmica. Para tal fin, se utiliza el tensor de energía-momento de un fluido perfecto, dado por la ecuación (VI.15), con un cuadrivector unitario de velocidad $u^\alpha = (1, \mathbf{0})$ en las coordenadas de Robertson-Walker, de acuerdo con lo mencionado en la sección anterior.

Después de calcular símbolos de Christoffel y tensores de Ricci para la métrica de Robertson-Walker, y sustituirlos en las ecuaciones de Einstein, se llega finalmente a las siguientes fórmulas fundamentales para el factor de escala $R(t)$:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(e + 3p) \tag{X.13}$$

y

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}e - \frac{K_0 c^2}{R^2} + \frac{c^2}{3}\Lambda, \tag{X.14}$$

[7] Los astrónomos prefieren medir distancias en *parsecs*; un parsec equivale a 3.26 años luz (30.86×10^{12} km) y un megaparsec (Mpc) es un millón de parsecs.

donde e es la densidad de masa-energía y p la presión del fluido cósmico. Además, la condición $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ conduce a la relación

$$\dot{e} = -3\frac{\dot{R}}{R}(e + p). \tag{X.15}$$

Nótese que estas tres últimas ecuaciones no son independientes entre sí.

Sólo falta especificar una ecuación de estado que relacione la presión p con la densidad de masa-energía e para así resolver las ecuaciones anteriores. Los dos casos más importantes corresponden a dos regímenes:

1) *Régimen dominado por la materia.* La presión es nula: $p = 0$. Esto corresponde en una buena aproximación al estado actual del Universo, en el que las presiones de la materia y de la radiación son del todo despreciables en comparación con la densidad de materia. En este caso la ecuación (X.15) se puede integrar y se tiene

$$e(t) \sim R^{-3}(t),$$

lo cual simplemente implica que la densidad de masa se diluye en proporción inversa al volumen.

2) *Régimen dominado por la radiación.* La presión se debe a partículas relativistas, y la ecuación de estado es, en esencia, la de un gas de fotones: $p = e/3$. Este régimen corresponde al estado inicial del Universo, cuando la presión de radiación era mucho mayor, en magnitud, que la densidad de energía en forma de materia. En este caso la ecuación (X.15) implica

$$e(t) \sim R^{-4}(t).$$

Se trata de la expansión adiabática de un gas de fotones: la densidad de energía se diluye en proporción inversa al volumen elevado a la potencia 4/3. Más precisamente, la fórmula básica de la termodinámica $e = a_{SB}T^4$, donde a_{SB} es la constante de Stefan-Boltzmann, implica que la temperatura del Universo en las épocas primordiales era inversamente proporcional al factor de escala R, es decir, $T \sim R^{-1}$. En particular, de la ecuación (X.14) es evidente que atrás en el tiempo, en el límite $R \to 0$, hubo una época en que la densidad de radiación, que es proporcional a R^{-4}, dominaba a la densidad de materia, que va como R^{-3}, así como a los términos asociados a curvatura y constante cosmológica.

Veamos ahora algunas soluciones simples de las ecuaciones anteriores:

1) *Modelo de Einstein.* Este es el primer modelo cosmológico, que fue propuesto por Einstein en 1917, antes de que se descubriera la expansión cósmica. Se trata de un modelo *estático* con R = constante, $K_0 = 1$ y $p = 0$. Las ecuaciones implican que el radio del universo es $R = \Lambda^{-1/2}$ y su densidad de materia es $\rho = \Lambda c^2/(4\pi G)$. La idea original de Einstein era un modelo de universo cerrado pero sin fronteras. Para ello, sin embargo, tuvo que introducir la constante cosmológica para detener el colapso del universo bajo su propia gravedad. El término con Λ en las ecuaciones de Einstein corresponde físicamente a una especie de "repulsión gravitacional" a escala cósmica, independiente de la materia.

2) *Modelo de de Sitter.*[8] Es un universo espacialmente plano, $K_0 = 0$, totalmente vacío: $e = 0$ y $p = 0$. Corresponde al límite idealizado de un universo vacío, sólo regido por la constante cosmológica. La solución de la ecuación cosmológica es $R(t) \sim \exp\{(\Lambda/3)^{1/2}ct\}$, que representa una expansión exponencial. La métrica de de Sitter fue importante en su momento porque representaba un modelo muy simple de un espacio en expansión, sin materia.

3) *Modelo de Einstein-de Sitter.* Corresponde a tomar la curvatura espacial nula, $K_0 = 0$, así como la constante cosmológica $\Lambda = 0$. En el régimen dominado por la materia, cuando la presión total es despreciable, se tiene $R \sim t^{2/3}$, mientras que en el régimen dominado por la radiación, $p = e/3$, se tiene $R \sim t^{1/2}$. Este modelo es bastante realista, ya que, como se verá a continuación, la curvatura del Universo parece ser efectivamente nula.

EJERCICIO X.2. Demuestre que en el modelo de Einstein-de Sitter con $p = 0$ la edad del universo es $\frac{2}{3}H_0^{-1}$.

Nótese que en el caso de un universo con curvatura espacial cero, la ecuación básica (X.14) implica que la densidad de masa-energía del Universo está relacionada con la constante de Hubble:

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} e(t_{\text{hoy}}) \qquad \text{si} \quad K_0 = 0 = \Lambda,$$

lo cual conduce a definir una *densidad crítica* como

$$e_{\text{crit}} = \frac{3c^2}{8\pi G} H_0^2. \tag{X.16}$$

[8] Willem de Sitter (1872-1934), astrónomo y matemático neerlandés, interesado en la teoría de la relatividad general.

El sentido físico de esta cantidad es la siguiente: a partir de la ecuación (X.14) se puede ver que —en el caso sin constante cosmológica Λ— la curvatura del Universo es positiva o negativa dependiendo de si su densidad real de energía-masa es mayor o menor que la crítica. Si es mayor, la propia gravedad del Universo detendrá su expansión para dar inicio a una contracción cósmica. Si es menor, la expansión cósmica irá frenándose progresivamente, pero sin detenerse nunca. En el primer caso se tiene un universo finito, en el segundo uno infinito. La frontera entre los dos casos corresponde a una curvatura cero, que implica un universo marginalmente en expansión eterna: se trata justamente del modelo de Einstein-de Sitter.

Es costumbre escribir las variables físicas en términos de cantidades adimensionales, utilizando el valor de la densidad crítica y la constante de Hubble. Así, se define

$$\begin{aligned}\Omega_{\text{mat}} &= \rho_{\text{mat}}c^2/e_{\text{crit}}\\ \Omega_{\text{rad}} &= e_{\text{rad}}/e_{\text{crit}}\\ \Omega_\Lambda &= c^2\Lambda/3H_0^2\\ \Omega_K &= c^2K_0/H_0^2R^2(t_{\text{hoy}}).\end{aligned}$$

Estos parámetros cosmológicos son muy importantes porque se pueden deducir a partir de observaciones astronómicas. En términos de ellos, la ecuación (X.14) toma la forma

$$\begin{aligned}\left(\frac{\dot R}{R}\right)^2 &= \left(\frac{\dot z}{1+z}\right)^2\\ &= H_0^2\left[\Omega_{\text{mat}}(1+z)^3 + \Omega_{\text{rad}}(1+z)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_K(1+z)^2\right],\end{aligned} \tag{X.17}$$

donde se ha tomado en cuenta que la energía está compuesta de dos partes, una asociada a la materia y otra a la radiación, es decir, $e = \rho_{\text{mat}}c^2 + e_{\text{rad}}$.

En particular, como se conoce con precisión la temperatura del Universo, la densidad de energía de la radiación se puede deducir de la ley de Stefan-Boltzmann, y corresponde a un valor de $\Omega_{\text{rad}} \sim 5\times10^{-5}$, del todo despreciable en la actualidad.

EJERCICIO X.3. Demuestre la ecuación (X.17), donde se ha utilizado z como una función del tiempo cósmico: $1 + z = R(t_{\text{hoy}})/R(t)$. Recuerde que $\rho_{\text{mat}} \propto R^{-3}$ y $e_{\text{rad}} \propto R^{-4}$.

Dado que $z = 0$ en el tiempo actual, la ecuación (X.17) implica la relación simple

$$\Omega_{\text{mat}} + \Omega_{\text{rad}} + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1, \tag{X.18}$$

en la que se puede apreciar la contribución de cada término. Por otra parte, es evidente de la misma ecuación que en el pasado remoto, cuando $z \to \infty$, el término dominante sobre todos los demás era la parte correspondiente a la radiación, a pesar de que en la actualidad desempeña un papel del todo despreciable en la evolución cósmica; en consecuencia, independientemente de la condiciones físicas actuales, el Universo muy temprano estaba descrito, en una buena aproximación, por la métrica de Einstein-de Sitter, con $R(t) \propto t^{1/2}$. Esto se puede ver también directamente de la ecuación (X.14): en su lado derecho el término de radiación, proporcional a R^{-4}, domina a los otros términos cuando $R \to 0$.

EJERCICIO X.4. En los primeros instantes del Universo, la radiación dominaba por completo las otras formas de energía. Tomando en cuenta que $e_{\text{rad}} \sim R^{-4}$, demuestre la siguiente relación entre la temperatura T y la edad del Universo t:

$$T^4 = \frac{3c^2}{32\pi G a_{SB} t^2},$$

válida en los primeros 100 mil años aproximadamente. Explícitamente,

$$T \approx (10^{10}\ \text{K}) t^{-1/2}$$

si el tiempo se mide en segundos y la temperatura en kelvin.

X.2.1 La teoría de la Gran Explosión

Mencionamos anteriormente que una de las pruebas más importantes a favor de la teoría de la Gran Explosión es la radiación cósmica de fondo. De hecho, las mediciones han alcanzado un grado de precisión tal que reproducen exactamente la fórmula de Planck para la radiación de un cuerpo negro con un error de apenas una parte en 100 mil, lo cual permite establecer la temperatura presente del Universo en 2.725 K.

De acuerdo con la teoría de la Gran Explosión, el Universo, durante sus primeros miles de años, se encontraba en un estado de plasma: un gas ionizado formado de iones y electrones libres, llamado a veces el "Fuego Primordial". Debido a que los electrones libres interactúan continuamente con los fotones por medio del efecto Thomson, un plasma no es transparente a la radiación, ya que el camino libre medio de los fotones es muy corto. Pero cuando la temperatura cósmica bajó a unos 6 mil grados, los electrones se pudieron unir a

los iones y se formaron así los primeros átomos; entonces, el gas cósmico, al dejar de estar ionizado, se volvió transparente:[9] ¡el Fuego Primordial se apagó! A partir de entonces, la luz empezó a propagarse libremente por el Universo. Debido a la expansión cósmica, el Fuego Primordial se encuentra actualmente a más de 13 mil millones de años luz de distancia, en todas las direcciones del Universo a nuestro alrededor y, asimismo, se está alejando de nosotros con una velocidad muy cercana a la de la luz (figura X.2). El resplandor del Fuego Primordial nos llega con una gran disminución de energía debido al corrimiento al rojo; en lugar de la luz visible, que corresponde a los 6 000 K, recibimos radiación de microondas que corresponde a la emitida por un cuerpo negro a 2.725 K.

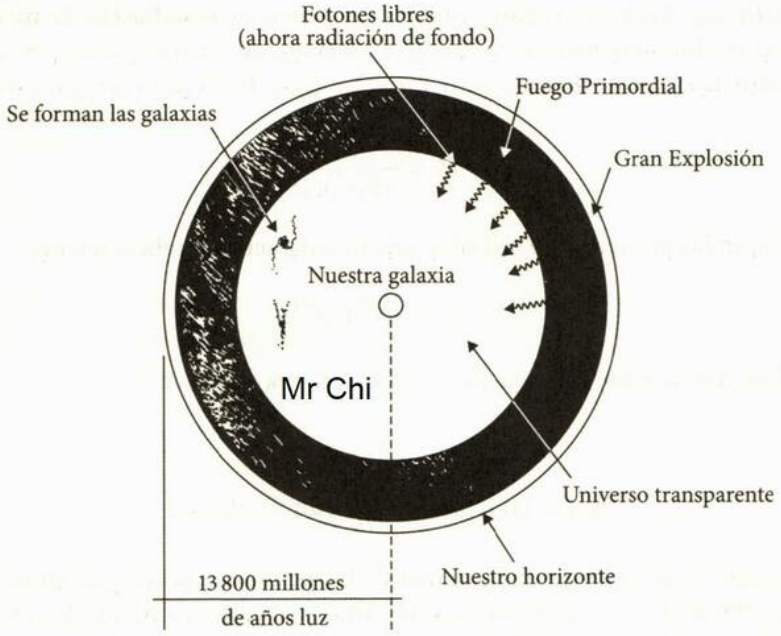


FIGURA X.2

Originalmente, Penzias y Wilson habían observado la radiación en una sola longitud de onda, pero las observaciones subsecuentes confirmaron todos los detalles. Las técnicas de observación siguieron desarrollándose, y en los años noventa no sólo se había demostrado que esta radiación es una planckiana perfecta y prácticamente homogénea a gran escala, sino que se logró medir

[9] La interacción de la radiación electromagnética con un átomo neutro es menos intensa que con un electrón libre.

pequeñas variaciones de temperatura, del orden de diezmilésimas de grado, que, se supone, corresponden a regiones del Fuego Primordial que dieron origen a las galaxias. Según la teoría más aceptada, esas manchas corresponden a zonas ligeramente más densas que se contrajeron posteriormente debido a su exceso de masa. Si la masa era suficiente, el colapso prosiguió; en algún momento se produjo una fragmentación y cada pedazo empezó a condensarse hasta que, al cabo de millones de años, se formaron las primeras estrellas agrupadas en galaxias. Inicialmente, esas zonas ligeramente más densas tenían un tamaño típico de unos 200 mil años luz, pero, debido a la expansión del Universo, las estructuras que originaron miden ahora unos 300 millones de años luz. Fueron el origen de los supercúmulos de galaxias, que constan de decenas o centenas de galaxias de todos los tamaños y formas, cada una con miles de millones de estrellas.

¿Qué tan lejos se puede ver en el Universo? La Gran Explosión, que se encuentra actualmente a unos 13.8×10^9 años luz de distancia, es el horizonte causal del Universo. Pero, en realidad, tampoco es accesible a nuestra visión porque su corrimiento al rojo es infinito (se aleja de nosotros a la velocidad de luz). Más aún, está oculta detrás del Fuego Primordial, que es lo más lejano que podemos ver (véase la figura X.2).

Actualmente, el modelo cosmológico de Friedman que mejor encaja con las observaciones astronómicas implica que los parámetros cosmológicos tienen los siguientes valores:

$$\Omega_{\text{mat}} \sim 0.317 \qquad \Omega_{\Lambda} \sim 0.683 \qquad \Omega_{K} \simeq 0.$$

El problema es que la materia común, aquella hecha de bariones y que es visible, no parece contribuir con más del 5% de la materia total. Se suele interpretar esto como la evidencia de que el Universo contiene "materia oscura" de una naturaleza hasta ahora desconocida. Así, la contribución de la materia bariónica y la oscura estaría dada por

$$\Omega_{\text{mat osc}} \sim 0.268 \qquad \Omega_{\text{mat bar}} \sim 0.049.$$

Por otra parte, estos valores de los parámetros cosmológicos fijan la edad del Universo en 13800 millones de años, y el momento en que se apagó el Fuego Primordial y el espacio se volvió transparente en 380 mil años después de la Gran Explosión.

El hecho de que la constante cosmológica parece no ser nula es un gran misterio: refleja el descubrimiento reciente de que la expansión del Universo parece *acelerarse* a gran distancia (la ley de Hubble es una aproximación lineal

para cúmulos de galaxias relativamente cercanos). Se ha vuelto costumbre asociar el término de la constante cosmológica en las ecuaciones de Einstein a un tensor de energía-momento tal que $(8\pi G/3c^2)T_{\alpha\beta} = \Lambda g_{\alpha\beta}$, lo cual implica una ecuación de estado exótica, $p = -e_V$, en la que la "presión" es negativa y de la misma magnitud que cierta densidad de energía e_V. Algunos cosmólogos piensan que se trata de la energía del vacío producida por "fluctuaciones cuánticas del vacío", y la llaman "energía oscura"; su posible existencia y origen son sujetos de debates.

En cuanto a la contribución de la materia, las observaciones astronómicas indican que la "materia común" —aquella hecha de protones, neutrones y electrones— sólo representa una pequeña fracción de toda la materia necesaria para ajustar los parámetros. Este es el famoso problema astronómico de la materia faltante, que sugiere la posibilidad de que el Universo esté lleno de algún tipo de "materia oscura", no bariónica, que no emite ninguna luz, por lo que sólo se puede detectar indirectamente por la fuerza de atracción gravitacional que ejerce sobre otros cuerpos visibles.

Al momento de escribir este texto, la aparente expansión acelerada del Universo y la naturaleza de la materia oscura son los problemas no resueltos más importantes de la cosmología moderna.

BIBLIOGRAFÍA

Nivel de divulgación

Hacyan, S. (2011), *El descubrimiento del Universo*, 4ª ed., FCE, México.

—— (2003), *Los hoyos negros y la curvatura del espacio-tiempo*, 3ª ed., FCE, México.

—— (2002), *Relatividad para principiantes*, 3ª ed., FCE, México.

—— (2002), *Del mundo cuántico al Universo en expansión*, 2ª ed., FCE, México.

Nivel más avanzado

Goldstein, H., Ch. P. Poole, Jr., y J. L. Safko (2001), *Classical Mechanics*, 3ª ed., Addison-Wesley, Boston.

Landau, L. D., y E. M. Lifshitz (1973), *Curso de física teórica*, volumen 2: *Teoría clásica de campos*, Reverté, Barcelona.

Peebles, P. J. E. (1993), *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press, Princeton.

Wald, R. M. (1984), *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago.

Weinberg, S. (1972), *Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*, John Wiley & Sons, Hoboken, Nueva Jersey.

—— (2008),

Weisskopf, V. F., "The Visual Appearance of Rapidly Moving Objects", *Physics Today*, 13(9): 24, 1960.

Introduction to especial relativity. Wolfgang Rindler.

ÍNDICE ANALÍTICO

aberración óptica, 40–41
acción de partícula libre, 69
acción electromagnética, 97
aceleración
  de la expansión del Universo, 181
  uniforme, 46–48
Ampère, A. M., 18
antineutrón, 76*n*
antipartícula, 76
antiprotón, 76

Bianchi, L., 146*n*, *véase también* identidades de Bianchi
Birkhoff, G. D., 158*n*, *véase también* teorema de Birkhoff

campo
  coulombiano, 105–108
  de corriente eléctrica, 112–115
  eléctrico constante, 99–101
  electromagnético constante, 101–103
  magnético constante, 97–99
  magnético no uniforme, 103–105
cargas en movimiento, 111–115
centro
  de inercia, 81
  de masa, 81
  de momento, 77, 81
Chandrasekhar, S., 166
Christoffel, E. B., 135*n*, *véase también* coeficientes de Christoffel, símbolos de Christoffel
coeficientes de Christoffel, 155, 159
cohete relativista, 83–86
colapso gravitacional, 167
Compton, A. H., 73*n*, *véase también* efecto Compton, longitud de onda de Compton
cono de luz, 29
constante
  cosmológica, 156
  de Hubble, 175
contracción
  de Lorentz, 36–38
  del espacio, 31–38
  del tiempo, 31–38
convención de Einstein, 59–60
coordenadas
  de Eddington, 164
  elipsoidales prolatas, 132
  esféricas, 131, 132
  polares, 106, 131, 132
corrimiento al rojo, 174
Coulomb, C. A., 17*n*, *véase también* campo coulombiano, ley de Coulomb
cuadrimomento, 71
  de un fotón, 72
cuadrivector
  de aceleración, 62
  de fuerza, 71
  de momento, 71
  potencial, 91
  unitario de velocidad, 61–64
curvatura gaussiana, 145, 172

d'Alembert, J. R., 90*n*
d'alembertiano, 90, 138
delta de Kronecker, 55, 119*n*
densidad crítica del Universo, 177
densidad de energía electromagnética, 128
derivada
  convectiva, 118
  covariante, 134–139, 143
Doppler, efecto, 41–44

ecuación
  de conservación de la carga, 87
  de continuidad, 116, 117
  de Euler, 123
    relativista, 125, 126

de Euler–Lagrange, 65, 142, 143
de Poisson, 153–155
ecuaciones
de Einstein, 153–156
de Maxwell, 87, 93, 126
edad del Universo, 181
modelo de Einstein-de Sitter, 177
Eddington, A. S., 164*n*, *véase también* coordenadas de Eddington
efecto
Compton, 73–74
Doppler, 41–44
Mössbauer, 75
Einstein
convención de, 59–60
modelo cosmológico de, 170
modelo de, 177
Einstein-de Sitter, modelo de, 177
enana blanca, 166
energía
electromagnética
densidad de, 128
interna, 120
oscura, 182
relativista, 69
umbral, 77
entropía, 118
equivalencia, principio de, 147, 148
escalar, 56
de Ricci, 146
espacio
contracción del, 31–38
de Minkowski, 27–30
espacios curvos, 140–143
estrella de neutrones, 166
éter, 19
Euler, ecuación de, 123
relativista, 125, 126
Euler–Lagrange, ecuación de, 65, 142, 143
eventos, horizonte de, 164
experimento de Michelson y Morley, 21

factor de escala del Universo, 173, 175
factor de Lorentz, 38
Faraday, M., 18
fluido
perfecto, 117, 119
simple, 118
fotones
gas de, 176
movimiento de, 161
fotoproducción de piones, 77
Friedman, A. A., 170
Fuego Primordial, 179–181
fuerza de Lorentz, 88, 96–97

Galileo Galilei, 15, *véase también* relatividad de Galileo, transformación de Galileo
Gamow, G., 170
gas de fotones, 176
Gauss, J. C. F., 145*n*, *véase también* curvatura gaussiana
gemelos, paradoja de los, 33–35
geodésica, 142, 151
geometría riemanniana, 143–146
gradiente, 60
Gran Explosión, 171
teoría de la, 179
grupo, 54
de Lorentz, 52–54

Hamilton, W. R., 65
hamiltoniano, 66
relativista, 69
horizonte de eventos, 164
hoyo negro, 165, 166
Hubble, E., 170*n*, 174, *véase también* constante de Hubble, ley de Hubble

identidades de Bianchi, 146
índices
libres, 59
mudos, 59
invariantes del campo, 94–95

Jacobi, C., 132*n*, *véase también* matriz jacobiana
jacobiano, 132

Kronecker, delta de, 55, 119*n*

Lagrange, J.-L., 65*n*, *véase también* Euler-Lagrange, ecuación de

lagrangiano, 65
de la partícula libre, 68
relativista de una partícula libre, 69
laplaciano, 138
Lemaître, G., 170
ley de Coulomb, 147
ley de Hubble, 174
línea de universo, 28
longitud
de onda de Compton, 74
propia, 36
Lorentz, H. A., 22, *véase también* contracción de Lorentz, factor de Lorentz, fuerza de Lorentz, grupo de Lorentz, norma de Lorentz, transformación de Lorentz
luz
cono de, 29
naturaleza ondulatoria, 19
velocidad, 21

Mach, E., 148*n*
Mandelstam, variables de, 81–82
masa
gravitacional, 147
inercial, 147
materia oscura, 181–182
matriz jacobiana, 132
Maxwell, J. C., 17, *véase también* ecuaciones de Maxwell, tensor de esfuerzos de Maxwell
Mercurio, perihelio de, 161
métrica
de Robertson-Walker, 173
de Schwarzschild, 157, 158
Michelson, A. A., 21, *véase también* experimento de Michelson y Morley
Minkowski, H., 27, *véase también* espacio de Minkowski, tensor de Minkowski, tensor métrico
modelo cosmológico
de de Sitter, 177
de Einstein, 170, 177
de Einstein-de Sitter, 177
momento
angular relativista, 78–81
centro de, 77
relativista, 69
Morley, E. W., 21, *véase también* experimento de Michelson y Morley
Mössbauer, efecto, 75
movimiento de fotones, 161

Noether, E., 66, *véase también* teorema de Noether
norma de Lorentz, 89

Oersted, H. C., 18
onda
de Compton, longitud de, 74
plana, 109–110
operador de proyección, 125
óptica, aberración, 40–41
órbita, 159

paradoja de los gemelos, 33–35
perihelio, 161
de Mercurio, 161
Planck, tiempo de, 171*n*
Poisson, D., 153*n*, *véase también* ecuación de Poisson
positrón, 76
potenciales electromagnéticos, 88–90
primera ley de la termodinámica, 124
principio de equivalencia, 147, 148
Principio de la Relatividad Especial, 93
proyección, operador de, 125

radiación cósmica de fondo (o de microondas), 170, 179
radio gravitacional o de Schwarzschild, 158
relatividad de Galileo, 16
Ricci-Curbastro, G., 146*n*, *véase también* tensor de Ricci, escalar de Ricci
Riemann, G. F. B., 143*n*, *véase también* geometría riemanniana, tensor de Riemann
Robertson-Walker, métrica de, 173

Schwarzschild, K., 157*n*, *véase también* métrica de Schwarzschild, radio gravitacional o de Schwarzschild
seudotensor, 58
signatura, 60
símbolos de Christoffel, 135–138, 143, 144
singularidad, 164

Sitter, de, modelo de, 177, *véase también* modelo de Einstein-de Sitter
Sitter, W. de, 177*n*

taquiones, 44–46
tensor, 56
de esfuerzos, 120
de Maxwell, 128
de Minkowski, 60, 119*n*
de Ricci, 146, 154
de Riemann, 143–146
dual, 92
electromagnético, 90–97
métrico, 57, 132
teorema
de Birkhoff, 158
de Noether, 66
Teoría de la relatividad especial (A. Einstein), 22
termodinámica
primera ley de la, 124
tiempo
contracción del, 31–38
de Planck, 171*n*
propio, 32
transformación
de Galileo, 16
de Lorentz, 22, 25–27
de velocidades, 38–39
transporte paralelo, 134, 143

Universo
aceleración de la expansión del, 181
edad del, 181

variables de Mandelstam, 81–82
vector
contravariante, 56
covariante, 55
vectores
base, 139–140
velocidad
de deriva, 102
transformación de velocidades, 38–39

Relatividad para estudiantes de física, de Shahen Hacyan,
se terminó de imprimir y encuadernar en mayo de 2017
en Impresora y Encuadernadora Progreso, S. A. de C. V. (IEPSA),
calzada San Lorenzo, 244; 09830 Ciudad de México.
El tiraje fue de 2 500 ejemplares.

En su composición, en LaTeX 2_ε,
se utilizaron tipos MinionPro y New TX math.
Cuidado de la edición: Axel Retif.